49. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2007/08

Riešenie teoretických úloh 1. kola kategórie A

1. Balistická dráha strely

a) V prípade zanedbateľného odporu prostredia ide o šikmý vrh v homogénnom tiažovom poli. Pohyb opisujú vzťahy pre súradnice a zložky rýchlosti

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g\,t$$

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = h_0 + v_0\, t \sin\alpha - (1/2)\, g\, t^2 .$$

Predpokladáme, že počiatočná výška vrhu h_0 je s ohľadom na sledovaný pohyb zanedbateľná. Z uvedeného matematického modelu dostaneme dostrel d z podmienky $x = d$ a $y = 0$. Maximálnu výšku h_m dostaneme z podmienky $y = h_\mathrm{m}$ a $v_y = 0$.

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \approx 92\ \mathrm{m}$$

$$h_m = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha \approx 23\ \mathrm{m}. \qquad \textit{2 body}$$

b) V prípade pôsobenia odporovej sily je pohybová rovnica tak zložitá, že jej analytické riešenie je veľmi zložité. V podobných prípadoch sa pristupuje k riešeniu numerickému pre konkrétne podmienky. Riešenie rovnice rozložíme na veľmi krátke časové úseky Δt, v ktorých možno považovať pôsobiace sily za konštantné (ich zmeny v rámci intervalu Δt sú zanedbateľné). Na letiace teleso pôsobí okrem tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\,\boldsymbol{g}$ sila odporu prostredia $F_\mathrm{o} = k\,(v_x^2 + v_y^2)$, ktorá pôsobí v proti okamžitému smeru pohybu, tzn. proti smeru vektora rýchlosti.

Okamžité zrýchlenie je

$$a_x = -\frac{k}{m}(v_x^2 + v_y^2)\cos\varphi \qquad a_y = -g - \frac{k}{m}(v_x^2 + v_y^2)\sin\varphi ,$$

kde

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

φ je uhol, ktorý zviera okamžitý smer pohybu s vodorovnou rovinou.

Z okamžitých hodnôt zložiek rýchlosti v čase t určíme okamžité hodnoty zložiek zrýchlenia. V dôsledku toho môžeme určiť zmenu rýchlosti v nasledujúcom časovom intervale

$$\Delta v_x = a_x\,\Delta t \qquad \text{a} \qquad \Delta v_y = a_y\,\Delta t .$$

V nasledujúcom čase je rýchlosť

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x\,\Delta t \qquad v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y\,\Delta t. \qquad (1)$$

Z polohy x, y v čase t dostaneme polohu v nasledujúcom čase

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x\,\Delta t \qquad y(t+\Delta t) = y(t) + v_y\,\Delta t. \qquad (2)$$

Dvojica rovníc (1) a (2) predstavuje základný matematický model pre numerické riešenie pohybu.

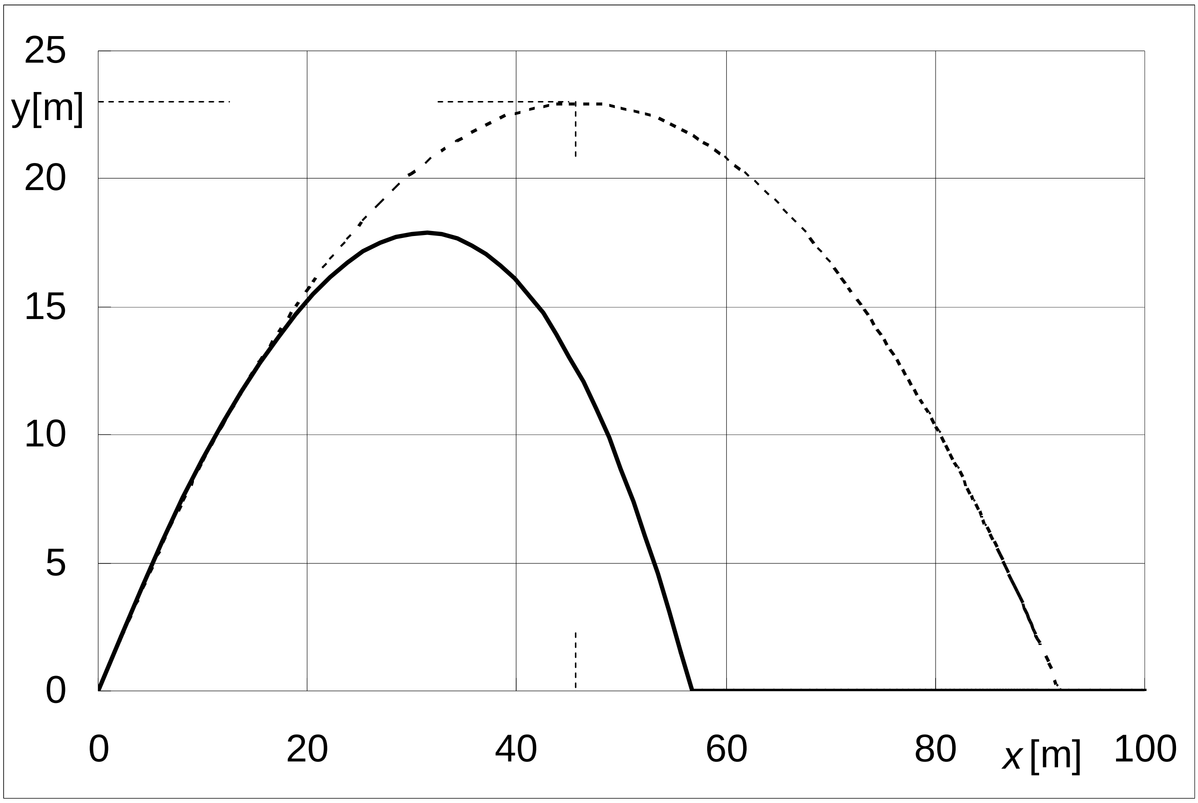
V prvom kroku definujeme počiatočné podmienky $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$. S použitím vzťahov (1) a (2) vypočítame hodnoty o Δt neskôr a tento postup sa opakuje. Súčasná výpočtová technika umožňuje urobiť veľký počet krokov v krátkom čase a teda dostatočne jemné delenie času Δt. Základnou požiadavkou je podmienka $\Delta v_x / v_x << 1$. Pre počiatočné hodnoty $(k/m)\, v_0^2\, \Delta t \cos\ \alpha \,/\, v_0 \cos\alpha << 1$ dostaneme po dosadení podmienku $\Delta t << 3{,}3$ s. Dostatočne jemné je delenie intervalu času o jeden rád, napr. $\Delta t = 0{,}1$ s.

Po vykonaní výpočtov dostaneme trajektóriu podľa nasledujúceho grafu. Môžeme ju porovnať s trajektóriou šikmého vrhu so zanedbateľným odporom prostredia s maximálnou výškou $h_m = 23$ m a dostrelom $d = 92$ m.

V prípade zadaného odporu prostredia $k/m = 0{,}01\ \mathrm{m}^{-1}$ je dosiahnutá výška $h_m^* \approx 17{,}9$ m a dostrel $d^* = 56{,}7$ m. Vidíme, že pomerne malý odpor má značný vplyv na pohyb najmä pri vyššej počiatočnej rýchlosti.

Pre porovnanie je ukázaná vypočítaná trajektória pre $v_0 = 10$ m/s, $k/m = 0{,}003\ \mathrm{m}^{-1}$ a $\Delta t = 0{,}01$ s. Vidíme, že v tomto prípade sa reálna trajektória dobre zhoduje s idealizovanou trajektóriou šikmého vrhu bez odporu prostredia.

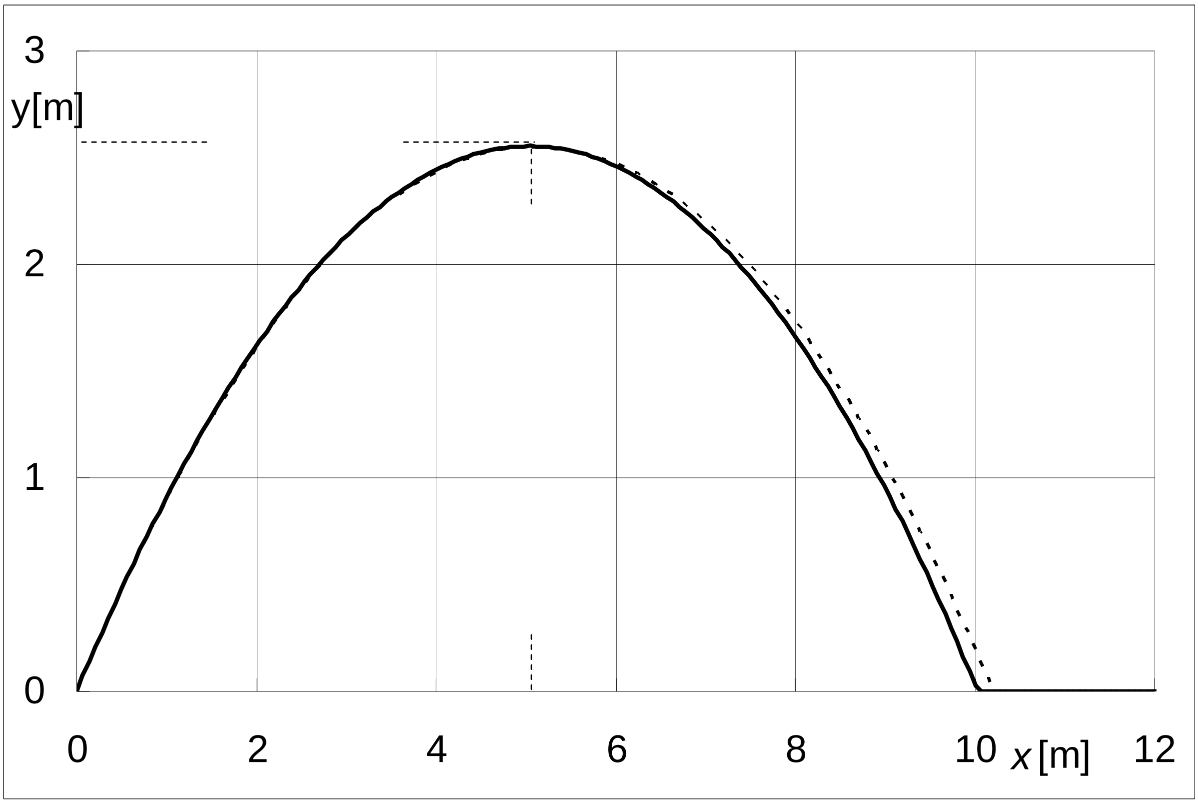
Pozn.: Vzorové riešenie je vytvorené pomocou programu MS EXCEL 2003.



Pre $k / m = 0{,}01$; $\Delta t = 0{,}01$ s; $v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 45°$

Správne zostavený numerický model 4 body

Správne zostrojené grafy a určené hodnoty dostrelu a max. výšky 4 body



Pre k/m = 0,003; Δt = 0,01 s, v_0 = 10 m/s; α = 45°.

2. *Var vody na vrchole hory*

Úlohu možno riešiť dvoma cestami – jednak cestou štatistickou, jednak cestou termodynamickou.

Štatistické riešenie

Entropia je definovaná vzťahom $S = k \ln N$, kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1} je Bolzmannova konštanta a N je počet realizácií daného stavu sústavy. Stavy s väčším počtom realizácií a tým aj väčšou pravdepodobnosťou výskytu predstavujú väčšiu entropiu. Najpravdepodobnejší je stav sústavy, ktorý má najväčší počet realizácií. Prirodzeným spôsobom sústava prechádza zo stavu menej pravdepodobného do pravdepodobnejšieho a tým má entropia tendenciu narastať. Keď sústava dosiahne stav s najväčšou pravdepodobnosťou (maximálnou entropiou), entropia sa už nezvyšuje, sústava nadobudla rovnovážny stav. Deje, pri ktorých $\Delta S > 0$, sa nazývajú deje nevratné.

a) Ak je sústavou ideálny plyn, ktorý pozostávajúci z N častíc a nachádza sa v nádobe s objemom V, môžeme si objem rozdeliť na elementárne bunky s objemom ΔV. Častica má počet možností $V/\Delta V$ svojho umiestnenia. N častíc má teda $(V/\Delta V)^N$ možností umiestnenia. Zodpovedajúca entropia je $S = k \ln (V/\Delta V)^N = k N \ln(V/\Delta V)$. Ak sa objem zmení pri konštantnej teplote, je zmena entropie

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k N \ln(V_2/\Delta V) - k N \ln(V_1/\Delta V) = k N \ln (V_2/V_1)$$

S použitím stavovej rovnice pre izotermický dej $p_2 V_2 = p_1 V_1$ dostaneme

$$\Delta S = k N \ln (p_1/p_2) = n R \ln (p_1/p_2).$$

b) Ak mení počas deja aj teplota a tým aj vnútorná energia, musíme brať do úvahy aj rozdelenie podľa hybností. Pri vnútornej energii ideálneho plynu $U = C_V T$ je maximálna hybnosť $p^* = \sqrt{2mU}$ - ide len o kinetickú energiu. Ak rozdelíme hybnosť na elementárne intervaly Δp^*, môže nadobudnúť každá zložka hybnosti, resp. momentu hybnosti, $p^*/\Delta p^*$

rôznych hodnôt (počet možností). Keď majú molekuly s stupňov voľnosti, týka sa to každého stupňa voľnosti. Pri N molekulách je teda počet možností prerozdelenia $(p^*/\Delta p^*)^{sN}$. Spolu s možnosťami umiestnenia je celkový počet možností $(V/\Delta V)^N\,(p^*/\Delta p^*)^{sN}$ a entropia je potom

$$S = k \ln (V/\Delta V)^N (p^*/\Delta p^*)^{sN} = kN \ln (V/\Delta V) + skN \ln (p^*/\Delta p^*).$$

Rozdiel entropie dvoch stavov je

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k\,N \ln (V_2/V_1) + s\,k\,N \ln (p_2^*/p_1^*).$$

Ak vyjadríme hybnosť pomocou vnútornej energie a tú pomocou teploty, upravíme druhý člen v predchádzajúcom vzťahu

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k\,N \ln (V_2/V_1) + (½)\,s\,k\,N \ln (T_2/T_1) = nR \ln (V_2/V_1) + C_V \ln (T_2/T_1), \quad (1)$$

kde $C_V = (s/2)\,n\,R$ je tepelná kapacita plynu.

V prípade, keď sústava nie je izolovaná a dodávame jej energiu vo forme tepla Q vratným spôsobom pri teplote T, zmení sa entropia sústavy $\Delta S = Q/T$.

Ak uvažujeme sústavu, ktorá pozostáva z vody a okolitého prostredia, pričom medzi vodou a okolím dochádza k tepelnej výmene, celková entropia sústavy nemôže klesať, $\Delta S_c \geq 0$. Medzný prípad predstavuje vratná výmena, pre ktorú $\Delta S_c = \Delta S_v + \Delta S_o = 0$.

Pri varu sa vzorka vody premení na paru pri teplote varu T a zmena entropie je $\Delta S_v = S_p - S_k$, kde S_p je entropia plynnej fázy a S_k entropia kvapalnej fázy. Keďže okolie odovzdá vode potrebné teplo Q, je s tým spojená zmena entropie okolia $\Delta S_o = -Q/T$.

V prípade fázovej zmeny pri teplote T_1 je zmena celkovej entropie sústavy

$$\Delta S_{c1} = n\,R\, \ln (V_1/\Delta V) + s\,n\,R \ln \left(\sqrt{2mC_V T_1}\,/\Delta p^*\right) - S_{k1} - Q_1/T_1 = 0.$$

Pri fázovej zmene rovnakej vzorky pri teplote T_2 je

$$\Delta S_{c2} = n\,R \ln (V_2/\Delta V) + s\,n\,R \ln \left(\sqrt{2mC_V T_2}\,/\Delta p^*\right) - S_{k2} - Q_2/T_2 = 0.$$

Ak odčítame obidve rovnice, upravíme výsledok ne tvar

$$n\,R \ln (V_2/V_1) + (s/2)\,n\,R \ln (T_2/T_1) - S_{k2} + S_{k1} - Q_2/T_2 + Q_1/T_1 = 0.$$

S použitím stavovej rovnice ideálneho plynu vyjadríme pomer objemov pomocou teploty a tlaku $V_2/V_1 = (p_1/p_2)\,(T_2/T_1)$ a dosadíme do rovnice

$$n\,R \ln (p_1/p_2) + \left(\frac{s}{2}+1\right) n\,R \ln (T_2/T_1) - S_{k2} + S_{k1} = Q_2/T_2 - Q_1/T_1.$$

Pri ďalšej úprave použijeme zjednodušenie, ktoré vychádza z predpokladu, že entropia tuhej fázy je výrazne menšia ako entropia fázy plynnej (podstatne menší objem a nižšia vnútorná energia) a z predpokladu, že skupenské teplo dodané okolím je pre obidve teploty rovnaké $Q_1 = Q_2 = n\,L$. Ďalej vychádzame z poznatku, že na malú relatívnu zmenu teploty varu je potrebná značná relatívna zmena tlaku, preto člen obsahujúci $\ln (T_2/T_1)$ zanedbáme v porovnaní s členom obsahujúcim $\ln (p_1/p_2)$. Pri týchto zjednodušeniach rovnicu upravíme na tvar $\quad R \ln (p_1/p_2) = L(1/T_2 - 1/T_1)$, (2)

odkiaľ dostaneme teplotu varu pri zmenenom tlaku

$$T_2 = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{R}{L} \ln \frac{p_1}{p_2}\right)^{-1} \approx 354{,}4\text{ K} \approx 81{,}2\text{ °C}.$$

<u>Termodynamický postup riešenia</u>

Prvý zákon termodynamiky má tvar $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$, kde $\mathrm{d}U = C_V\,\mathrm{d}T$ je zmena vnútornej energie a $\delta W = -p\,\mathrm{d}V$ je práca vonkajších síl. Termodynamicky sa entropia definuje vzťahom pre diferenciálnu vratnú zmenu stavu pri určitej teplote $\mathrm{d}S = \delta Q / T$. Teplo možno potom vyjadriť pre vratný dej $\delta Q = T\,\mathrm{d}S$.

S použitím predchádzajúcich vzťahov a stavovej rovnice ideálneho plynu vyjadríme diferenciálnu zmenu entropie ideálneho plynu

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + n R \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Ak urobíme integrál tohto vzťahu, dostaneme

$$\Delta S = C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right),$$

čo vzťah rovnaký ako vzťah (1) odvodený na základe štatistických úvah.
Pri popise termodynamických dejov majú mimoriadny význam stavové veličiny, ktoré majú v každom rovnovážnom stave sústavy jednoznačnú hodnotu. Medzi stavové veličiny patria napr. U, S, T, p, V.
Zmenu stavovej veličiny U môžeme vyjadriť pomocou zmeny nezávislých stavových veličín S a V podľa prvého termodynamického zákona

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V. \qquad (3)$$

V prípade stavovej zmeny sú určujúce iné stavové veličiny, a to tlak p a teplota T. Stavovú veličinu, ktorej zmena bude vyjadrená pomocou zmeny stavových veličín p a T, dostaneme tak, aby sme zo vzťahu (3) odstránili členy na pravej strane a nahradili ich požadovanými novými. Definujeme novú stavovú veličinu - Gibbsov termodynamický potenciál vzťahom

$$G = U - T S + p V.$$

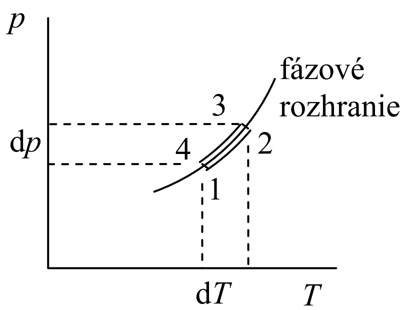
Diferenciálna zmena tejto veličiny je

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U - \mathrm{d}(T S) + \mathrm{d}(p V) = T\,\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V - (T\mathrm{d}S + S\mathrm{d}T) + (p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p)$$

a po úprave

$$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p$$

Uvažujme fázový diagram p-T pre rozhranie kvapalnej a plynnej fázy (obrázok). Body na krivke udávajú podmienky varu.
Uvažujme uzatvorenú cestu 1-2-3-4-1, ktorá pozostáva z elementárnych úsekov 1-2 a 3-4, na ktorých sa menia stavové veličiny o dT a dp. Deje 2-3 a 4-1 predstavujú zmenu fázy pri konštantnej teplote a konštantnom tlaku. Dej 1-2 sa uskutočňuje v plynnej fáze, dej 3-4 v kvapalnej.



Celková zmena ΔG pozdĺž tejto cesty pozostáva zo súčtu zmien na jednotlivých úsekoch

$\Delta G_{12} = -S_p\,\mathrm{d}T + V_p\,\mathrm{d}p \qquad \Delta G_{34} = -S_k\,(-\mathrm{d}T) + V_k\,(-\mathrm{d}p)$

$\Delta G_{23} = \Delta G_{41} = 0$, lebo pri týchto dejoch sa tlak ani teplota nemenia.
Keďže je cesta uzatvorená (konečný stav je totožný s počiatočným), je $\Delta G = 0$.

$$-S_p\,\mathrm{d}T + V_p\,\mathrm{d}p - S_k\,(-\mathrm{d}T) + V_k\,(-\mathrm{d}p) = 0$$

a $\qquad (V_p - V_k)\,\mathrm{d}p = (S_p - S_k)\,\mathrm{d}T$.

Ak predpokladáme, že plynná fáza danej vzorky má podstatne väčší objem ako kvapalná, je $V_p - V_k \approx V_p$. Ďalej budeme predpokladať pre zjednodušenie, že plynná fáza sa správa ako ideálny plyn a teda $V_p = n R T / p$. Zmena entropie pri fázovej zmene sa vyjadrí v zmysle definície pomocou dodaného skupenského tepla $\Delta S = S_p - S_k = Q / T = n L / T$. S použitím týchto zjednodušení dostaneme rovnicu $\displaystyle \frac{\mathrm{d}T}{T^2} = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}p}{p}$

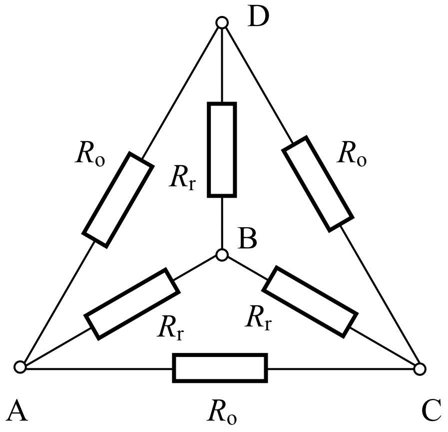
a jej integráciou $\displaystyle \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{R}{L}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right),$

čo je rovnica (2), ktorá bola odvodená pomocou štatistických úvah.

Správne určená zmena entropie 4 body

Správne určená teplota varu vrátane príslušného odvodenia 6 bodov

3. *Nekonečná elektrická sieť*



Z hľadiska správania sa obvodu existujú voči vonkajšiemu pozorovateľovi štyri významné uzly: 3 vrcholy trojuholníka ACD a stredný uzol B. Náhradný obvod tejto siete musí byť štvorbodový a musí zachovávať symetriu pôvodného obvodu. Všeobecný náhradný obvod pozostáva zo 4 uzlov a ich vzájomných prepojení – 1. obrázok.

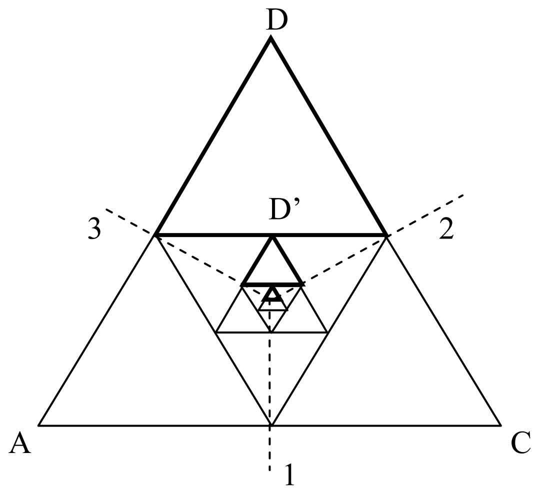
Obvod pozostáva z troch obvodových rezistorov R_o a troch radiálnych R_r.

Hľadaný odpor R_{AB} určíme z tohto zapojenia. Pri určovaní odporu pripojíme zdroj napätia medzi uzly A a B. Keďže celá sústava je symetrická podľa osi AB, rezistorom CD prúd neprechádza a možno ho pre tento výpočet odpojiť. Odpor R_{AB} pozostáva z paralelného zapojenia troch vetiev: R_r - AB, $R_o + R_r$ - ADB a ACB.

$$R_{AB} = \frac{(R_o + R_r)\, R_r}{R_o + 3R_r}\,.$$

Na zodpovedanie úlohy treba poznať obidva náhradné odpory.

<u>Určenie odporu R_r</u>



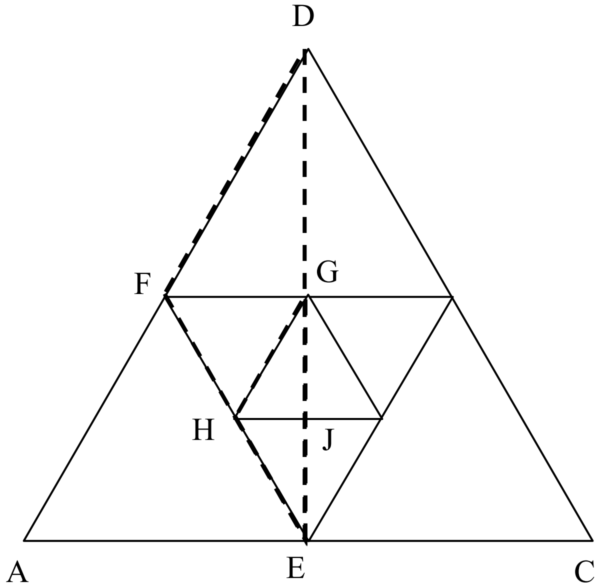
Odpory obvodové eliminujeme tak, že vrcholy ACD pripojíme k rovnakému potenciálu a druhý pól zdroja pripojíme k bodu B. O ohľadom na rovnaké potenciály vrcholov neprechádza žiadnym z obvodových rezistorov prúd, a preto ich môžeme vyradiť. Zostatok obvodu porovnáme s pôvodnou sieťou, 2. obrázok Osami 1, 2, 3 rozdelíme sieť na tri segmenty, pričom každému z nich zodpovedá jeden rezistor R_r. Ak postupujeme od vrcholu (napr. D) k stredu B vytvárame sériu postupne sa zmenšujúcich trojuholníkov, pričom nasledujúci je 4x menší ako predchádzajúci – teda má aj 4x menší odpor. Pre prvý trojuholník dostaneme odpor $R_{DD'} = (3/8)\, R$. Celkový odpor medzi vrcholom a stredom je

$$R_r = \frac{3}{8}\, R \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{3}{8}\, R \;\frac{1}{1-(1/4)} = \frac{R}{2}\,.$$

<u>Určenie odporu R_o</u>

Pripojíme zdroj medzi uzly AC a určíme celkový odpor. Z dôvodu symetrie medzi bodmi BD neprechádza prúd, preto príslušný rezistor pre tento prípad vyradíme. Ide o paralelné zapojenie troch vetiev: AC - R_o, ABC – $2R_r$, ADC – $2R_o$. Výsledný odpor je

$$R_{AC} = \frac{2R_o R_r}{R_o + 3R_r} = \frac{2R_o R}{2R_o + 3R} \;.$$



Výsledok porovnáme s výpočtom podľa pôvodnej siete. Z hľadiska napájania v bodoch AC je sieť symetrická vzhľadom na os ED. Medzi A a osou DE je odpor AE - $R/2$ a paralelne AE so sériovo pripojeným trojuholníkom FED, ktorý má medzi bodmi FG odpor R_T.

$$R_{AE} = \frac{(R/2)(R/2 + R_T)}{R + R_T} \;.$$

Odpor R_T určíme sčítaním vodivostí paralelných vetiev medzi F a osou ED: FD – $R/2$, FG – $R/4$ a vetvy FHJ – $R/4 + R_T/2$ (vo vetve je trojuholník 2x menší ako FED, preto má polovičný odpor)

$$R_T = \left(\frac{2}{R} + \frac{4}{R} + \frac{1}{R/4 + R_T/2} \right),$$

odkiaľ dostaneme

$$R_T = \frac{R}{6}\left(\sqrt{7} - 2\right).$$

Odpor medzi vrcholmi AC (dvojnásobok odporu R_{AE}) je

$$R_{AC} \;=\; R \;\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+4}.$$

Porovnaním so vzťahom podľa náhradného obvodu dostaneme

$$R_o = \frac{R}{2}\left(\sqrt{7} + 1\right).$$

Po dosadení do pôvodného vzťahu určíme hľadaný odpor

$$R_{AB} = \frac{R}{18}\left(1 + 2\sqrt{7}\right).$$

Existuje viac možností riešenia – akýkoľvek „rozumný“ postup, ktorý vedie k správnemu výsledku 10 bodov
V prípade neúplného riešenia zvážiť mieru bodového hodnotenia podľa počtu úspešných krokov.

4. *Diamagnetizmus*

a) Na vytvorenie predstavy využijeme Bohrov model atómu vodíka, ktorý predstavuje prechodný model v čase, keď ešte nebola známa vlnová mechanika. Bohrov model predstavuje značné zjednodušenie a nedokáže dať odpovede na mnohé otázky vlastností a správania sa atómu, niektoré vlastnosti, ako napr. energie stacionárnych stavov, vystihuje správne. Bohrov model vychádza z predstavy, že okolo kladného jadra sa pohybuje po kruhovej trajektórii záporný elektrón, pričom pre stacionárny stav platí kvantová podmienka $L = n\hbar$, kde $n = 1, 2, \ldots$ je kvantové číslo, $\hbar = 1{,}06\cdot10^{-34}$ J·s je modifikovaná Planckova konštanta, $L = m\,v\,r$ je orbitálny moment hybnosti elektrónu. Bohrov model neuvažoval spin elektrónu a jeho vlastný magnetický moment. Magnetický dipólový moment elektrónu súvisí podľa Bohrovho modelu iba s orbitálnym pohybom elektrónu.

Magnetický dipólový moment

$$\mu_e = \mu_0 I S,$$

kde $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ H·m^{-1} je permeabilita vákua, $I = e/T$ je efektívny prúd, ktorý predstavuje pohyb elektrónu (e je elementárny náboj, T perióda obehu elektrónu) a $S = \pi r^2$ je obsah kruhu ohraničeného orbitálnou trajektóriou elektrónu.

Parametre pohybu dostaneme z podmienky silovej rovnováhy

$$k\,\frac{e^2}{r^2} = m\,\omega_0^2\,r\,.$$

Uhlová frekvencia pohybu elektrónu je $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k e^2}{m r^3}}$.

Kvantovú podmienku upravíme na tvar $m\,\omega_0\,r^2 = n\hbar$.

Magnetický moment elektrónu je potom

$$\mu_e = \mu_0\,\frac{e}{T}\,\pi r^2 = \frac{\mu_0 e}{2}\,\omega_0\,r^2 = \mu_0\,\frac{e}{2m}\,n\hbar\,.$$

Pre základný stav $n = 1$ je $\mu_e \approx 1{,}17\cdot10^{-29}$ N·m^2·A^{-1}.

S použitím kvantovej podmienky dostaneme

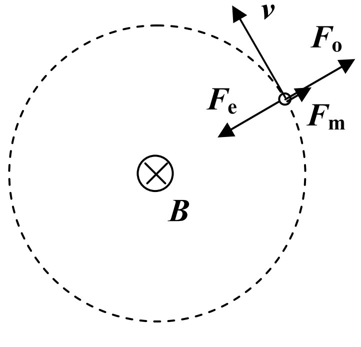
$$\omega_0 = \frac{k^2 e^4 m}{n^3 \hbar^3} = \frac{1}{n^3}\,(4{,}06\cdot10^{16}\ \mathrm{s^{-1}}).$$

Ak je pravdepodobnosť obidvoch smerov orientácie magnetického momentu rovnaká, je výsledná magnetizácia (súčet magnetických momentov častíc v jednotke objemu) nulová.

3 body

b) Ak sa elektrón pohybuje v homogénnom magnetickom poli kolmo na smer magnetickej indukcie, pôsobí naň Lorentzova sila $F_m = e\,v\,B$. Rovnica rovnováhy síl má tvar

$$k\,\frac{e^2}{r^2} = m\,\omega^2\,r + e\,\omega\,r\,B\,.$$



Pre frekvenciu obiehania elektrónu dostaneme

$$\omega = -\frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eB}{2m}\right)^2 + \frac{k e^2}{m r^3}}\,.$$

Pre slabé magnetické pole je prvý člen pod odmocninou zanedbateľne malý a uhlovú frekvenciu vyjadríme

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{eB}{2m}\,.$$

V prípade opačného smeru pohybu má magnetický moment opačnú orientáciu (proti smeru vektora $\boldsymbol{B}$) a magnetická sila má opačný smer (k jadru). Rovnakým spôsobom dostaneme výsledok $\omega \approx \omega_0 + \dfrac{eB}{2m}$.

Ak zanedbáme vplyv magnetického poľa na polomer orbitálneho pohybu, predstavuje zmena uhlovej frekvencie zmenu magnetického momentu

$$\Delta\mu_e = \mu_0 \pi r^2 (e/2\pi) \Delta\omega = \mu_e \Delta\omega / \omega_0 .$$

Pri obidvoch orientáciách orbitálneho pohybu má zmena $\Delta\mu_e$ rovnaký smer – proti smeru vonkajšieho magnetického poľa $\boldsymbol{B}$. Dochádza tak k zoslabeniu výsledného magnetického poľa, čo je podstatou diamagnetizmu.

4 body

c) Magnetizácia je výsledný magnetický moment častíc v jednotke objemu. Ak ide o molekuly vodíka, určíme počet molekúl zo stavovej rovnice

$N = p\, V / (k_B\, T)$, kde $V = 1\ \mathrm{m}^3$ a $k_B = 1{,}4\cdot10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$ je Boltzmannova konštanta.

Počet atómov je dvojnásobný (dvojatómové molekuly)

$$M = 2N\,\Delta\mu_e = -2\frac{p}{k_B T}\frac{eB\mu_e}{2m\omega_0} = -\left(\frac{p}{k_B T}\frac{e}{m}\frac{\mu_e}{\omega_0}\right) B = \chi_m B,$$

kde χ_m je magnetická susceptibilita látky.

Po dosadení $\chi_m = -\dfrac{p}{k_B T}\dfrac{e}{m}\dfrac{\mu_e}{\omega_0} \approx -1{,}3\cdot10^{-7}$. *3 body*

5. *Vesmírne vznášadlo*

a) V inerciálnej sústave pôsobí na lístok gravitácia, pričom gravitačná sila je

$$F_g = \kappa \frac{M m}{r^2},$$

kde m je hmotnosť lístka, r vzdialenosť lístka od stredu Slnka.

V smere od Slnka pôsobí na lístok tlak žiarenia Slnka. Tlaková sila $F_z = \Delta p/\Delta t$, Δp je zmena hybnosti žiarenia odrazeného od povrchu lístka v čase Δt. Hybnosť $p = m^* c = m^* c^2/c = E/c$. Pri zrkadlovom odraze je $\Delta p = 2\,p = 2E/c$. Potom $F_z = 2E/c\ \Delta t = 2P/c$, kde P je výkon žiarenia dopadajúceho na povrch lístka. Ak označíme hustotu žiarivého toku H (výkon pripadajúci na jednotku plochy kolmej na smer šírenia), je $P = H\,S$, kde S je obsah odrážajúcej plochy lístka.

Slnko vyžaruje svojím povrchom žiarenie ako dokonale čierne teleso. Podľa Stephan-Boltzmannovho zákona je hustota žiarivého toku na povrchu Slnka $H_S = \sigma T^4$ a celkový výkon vyžiarený povrchom Slnka je $P_S = 4\,\pi\, r_S^2\, H_S$. Toto žiarenie sa šíri do všetkých smerov od Slnka. Vo vzdialenosti r sa tento výkon rozkladá na plochu $S_r = 4\pi r^2$ a zodpovedajúca hustota žiarivého toku je $H = P_S/S_r$. Tlaková sila, ktorá pôsobí na lístok je potom

$$F_z = \frac{2P}{c} = \frac{2HS}{c} = \frac{2\sigma T^4 r_S^2 S}{c r^2}.$$

Lístok sa bude vznášať, ak sú sily gravitácie a tlaku žiarenia v rovnováhe. Podmienka rovnováhy je $\dfrac{2\sigma T^4 r_S^2 S}{c r^2} = \kappa \dfrac{M m}{r^2}$. *4 body*

Vidíme, že táto podmienka nezávisí od vzdialenosti od Slnka r.

b) Z rovnice rovnováhy dostaneme plošnú hustotu lístka

$$\mu_1 = \frac{m}{S} = \frac{2\,\sigma\,T^4 r_S^2}{\kappa\, c\, M} \approx 1{,}78\ \mathrm{g{\cdot}m^{-2}}.$$ *2 body*

c) Ak je plošná hustota menšia ako hodnota μ_1, prevláda tlaková sila žiarenia a lístok sa bude v dôsledku pôsobenia výslednej sily pohybovať smerom od Slnka. Výsledná sila je

$$F = \frac{2\,\sigma\,T^4 r_S^2\, S}{c\, r^2} - \kappa\,\frac{M\,m}{r^2} = \kappa\left(\frac{2\,\sigma\,T^4 r_S^2}{\kappa\, c\, M \mu_1} - 1\right)\frac{M\,m}{r^2} = \kappa^*\,\frac{M\,m}{r^2}.$$

Ide o silu, ktorá má rovnaký charakter ako čistá gravitačná sila a vplyv žiarenia je zachytený modifikovanou gravitačnou konštantou κ^*.

Pohyb v poli sily opisuje zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + \kappa^*\,\frac{M\,m}{r_1} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + \kappa^*\,\frac{M\,m}{r_2}.$$

Pre nulovú počiatočnú rýchlosť dostaneme

$$\mu_2 = \frac{2\,\sigma\,T^4 r_S^2}{\kappa\, c\, M}\left(1 + \frac{v_2^2}{2\kappa M}\,\frac{r_1\, r_2}{r_2 - r_1}\right)^{-1} \approx 1{,}17\ \mathrm{g{\cdot}m^{-2}}.$$ *4 body*

6. *Spomaľovanie elektrónov*

a) Dobrými moderátormi sú látky, ktoré obsahujú veľké množstvo vodíka a v podstate látky, ktorých atómy majú pomerne malé hmotnostné číslo. Najčastejšie používanými moderátormi sú: ťažká voda - deutérium ($^2_1\mathrm{H}$), berýlium ($^9_4\mathrm{Be}$), grafit $\left(^{12}_{6}\mathrm{C}\right)$, parafín,...

2 body

b) Z teórie centrálnej pružnej zrážky vieme, že častica (v našom prípade rýchly neutrón) s hmotnosťou m_1 a rýchlosťou v_1 (pomerne veľkou) pri centrálnej pružnej zrážke s časticou s hmotnosťou m_2 (atómom moderátora), o ktorom predpokladáme, že je v pokoji ($v_2 = 0$), podľa nerelativistického zákona zachovania energie a hybnosti

$$m_1\, v_1 = m_1\, u + m_2\, u'$$

$$\frac{1}{2} m_1\, v_1^2 = \frac{1}{2} m_1\, u^2 + \frac{1}{2} m_2\, u'^2$$

sa spomalí na menšiu rýchlosť $u = v_1\,\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$. *2 body*

Neutrón pri spomalení v dôsledku zrážky stratí časť svojej pôvodnej energie, ktorú možno vyjadriť vzťahom

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = 1 - \left(\frac{u}{v_1}\right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$ *2 body*

Tento relatívny úbytok je v prípade deuterónov ($m_2 = 2\, m_1$) rovný 89%, v prípade berýlia ($m_2 = 9\, m_1$) je 36% a v prípade grafitu ($m_2 = 12\, m_1$) to činí 28%. *2 body*

c) Podľa výsledku časti b) úlohy vidíme, že ťažká voda je účinnejším moderátorom ako berýlium alebo grafit. *2 body*