49. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2007/08

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1. Viazaný pohyb

Označme polomery a hmotnosti telies tak, ako je to na obrázku v zadaní úlohy. Pre pohyb menšieho z telies platí

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 x\,, \qquad (1)$$

kde G je všeobecná gravitačná konštanta, x je polomer kruhovej trajektórie menšieho telesa a ω je uhlová rýchlosť sústavy telies.
Pre veľkosť zrýchlenia voľného pádu v bode A platí

$$g_{\mathrm{A}} = G\frac{m}{r^2} - G\frac{M}{(R-r)^2} + \omega^2(x-r)\,,$$

kde prvý člen na pravej strane prezentuje gravitačné pole menšieho telesa, druhý člen gravitačné pole väčšieho telesa a tretí člen vyjadruje vplyv rotačného pohybu.
Pre veľkosť zrýchlenia voľného pádu v bode B analogicky platí

$$g_{\mathrm{B}} = G\frac{m}{r^2} + G\frac{M}{(R+r)^2} - \omega^2(x+r)\,.$$

Pre rozdiel hodnôt oboch zrýchlení potom platí

$$\Delta g = g_{\mathrm{B}} - g_{\mathrm{A}} = GM\left[\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2}\right] - 2\,\omega^2 x\,.$$ **3 body**

Z rovnice (1) vyjadríme výraz $\omega^2 x$ a dosadíme do predchádzajúcej rovnice. Dostaneme

$$\Delta g = G\,M\left[\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2}\right] - 2G\frac{M}{R^2}\,.$$

Po úprave a dosadení $r/R = \beta$ máme

$$\Delta g = GM\left[\frac{1}{R^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} + \frac{1}{R^2\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{2}{R^2}\right] = G\frac{M}{R^2}\left[\frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^2} - 2\right].$$

Po umocnení výrazov v zátvorkách upravíme výraz na tvar

$$\Delta g = 6\,G\frac{M}{R^2}\,\beta^2\,\frac{1-\beta^2\ /\ 3}{\left(1-\beta^2\right)^2}\,.$$ **3 body**

Posledný zlomok môžeme pre $\beta << 1$ približne položiť rovný jednej, takže

$$\Delta g \;\approx\; 6\,G\,\frac{M}{R^2}\,\beta^2\,.$$

Keďže $g_m \approx G\dfrac{m}{r^2}$, hľadaný pomer bude **1 bod**

$$\frac{\Delta g}{g_m} = \frac{6\,G\,\frac{M}{R^2}\,\beta^2}{G\,\frac{m}{r^2}} = 6\,\alpha\,\beta^4\,.$$ **2 body**

Pre zadané číselné hodnoty potom platí $\Delta g/g = 4\cdot 10^{-5}$. **1 bod**

2. *Mraky v atmosfére*

a) Ak pre stúpajúci vzduch platí stavová rovnica $p\,V^k = p_0\,V_0^{\,k}$, upravíme ju s použitím všeobecnej stavovej rovnice $p\,V = n\,R\,T$ na tvar, v ktorom vystupujú iba veličiny p a T, ktoré nás zaujímajú

$$p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (1)$$

So zmenou výšky sa zmení tlak vzduchu

$$\mathrm{d}p = -\rho\,g\,\mathrm{d}h = -\frac{p\,M_\mathrm{m}}{R\,T}\,g\,\mathrm{d}h\,. \qquad (2)$$

Prvý vzťah zderivujeme

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,T} = p_0\;\frac{k}{k-1}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{1}{T_0} \qquad (3)$$

Dosadíme (1) do (2) a potom (2) do (3)

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,h} = \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,h} = -\;\frac{k-1}{k}\,\frac{M_\mathrm{m}\,g}{R} \;\approx\; -\,5{,}7\ ^\circ\mathrm{C/km}.$$

Z výsledku je zrejmé, že teplota klesá s výškou lineárne.
Podľa získaného výsledku by mala byť vo výške 10 km teplota -37 °C, čo dobre zodpovedá pozorovanej hodnote – 40 °C **4 body**

b) Pri teplote $t_0 = 20$ °C je tlak nasýtenej pary $p_{\mathrm{n}20} = 2{,}33$ kPa. Podľa stavovej rovnice zodpovedá tomuto tlaku hustota (absolútna vlhkosť)

$$\rho_{\mathrm{v}0} = \frac{m}{V} = \frac{p_\mathrm{v}\,M_\mathrm{mv}}{R\,T_0}\,.$$

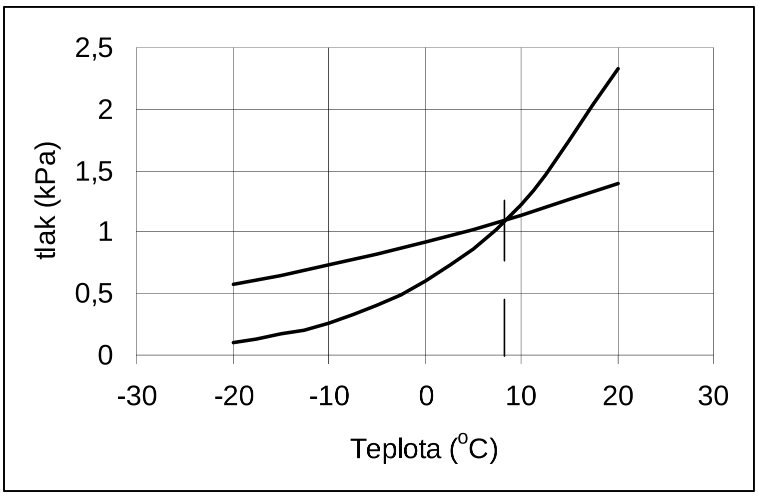
Vidíme, že pri danej teplote je absolútna vlhkosť priamo úmerná tlaku pary. Relatívna vlhkosť je teda rovná pomeru tlaku pary a tlaku nasýtenej pary pri danej teplote, teda

$$p_{\mathrm{v}0} = \eta\,p_{\mathrm{n}20} \;\approx 1{,}40\ \mathrm{kPa}.$$

Po dosadení dostaneme $\rho_{\mathrm{v}0} = \dfrac{\eta\,p_\mathrm{n}\,M_\mathrm{mv}}{R\,T_0} \;\approx\; 10{,}3\ \mathrm{g\cdot m^{-3}}$. **3 body**

c) Vzťah (1) použijeme pre vodnú paru $p_\mathrm{v} = p_{\mathrm{v}0}\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$. (4)

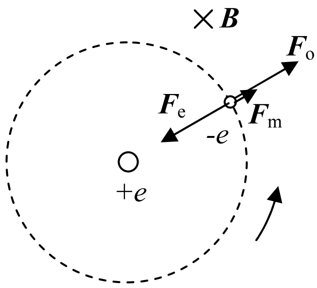
Teplota, pri ktorej sa hodnota p_v zhoduje s tlakom p_n zodpovedá rosnému bodu. Najjednoduchšie výsledok dostaneme graficky – do spoločného grafu vynesieme závislosť (4) a závislosť podľa tabuľky:



Priesečník zodpovedá teplote $t_\mathrm{M} \approx 8$ °C. To znamená pokles teploty o 12 °C a s použitím vypočítaného gradientu dostaneme príslušnú výšku $h_\mathrm{M} \approx 2{,}1$ km. **3 body**

3. *Atóm vodíka v magnetickom poli*

a) V Bohrovom modeli sa uvažuje rovnováha dostredivej sily (sily elektrickej príťažlivosti) a sily odstredivej. V prípade prítomnosti magnetického poľa pôsobí navyše Lorentzova sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = -e\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Táto sily pôsobí v rovine trajektórie kolmo na smer pohybu elektrónu. Pre označený smer obiehania elektrónu a smer vektora magnetickej indukcie má sila F_{m} smer odstredivý (obrázok), pri obiehaní v opačnom smere je smer sily F_{m} opačný (dostredivý).



$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \mp e\,v\,B\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Kvantová podmienka je $L = m\,v\,r = n\,\hbar$. **1 bod**

Po dosadení dostaneme $\quad \dfrac{1}{r^2} - 2\dfrac{k\,m\,e^2}{2n^2\hbar^2}\,\dfrac{1}{r} \pm \dfrac{e\,B}{n\hbar} = 0\,.$

Riešenie má tvar (fyzikálny význam má znamienko + pred odmocninou).

$$\frac{1}{r} = \frac{k\,m\,e^2}{2n^2\hbar^2}\left[1+\sqrt{1\mp\frac{4B}{k^2m^2}\,\frac{n^3\hbar^3}{e^3}}\right]$$

Celková mechanická energia je (príspevok od magnetického poľa je $-(1/2)\,e\,v\,r\,B$ pre orientáciu obiehania podľa obrázku)

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{pe}} + E_{\mathrm{pm}} = \frac{1}{2}m\,v^2 - k\frac{e^2}{r} \mp \frac{e}{2m}L\,B = \frac{1}{2}\left(k\frac{e^2}{r} \mp e\,B\,v\,r\right) - k\frac{e^2}{r} \mp \frac{e\,B}{2}v\,r =$$

$$= -\frac{k^2\,m\,e^4}{4n^2\hbar^2}\left[1+\sqrt{1\mp\frac{4B}{k^2m^2}\,\frac{n^3\hbar^3}{e^3}}\right] \mp \frac{e\,B\,n\hbar}{m}\,.$$

Výraz pod odmocninou je blízky 1, použijeme približný vzťah $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ pre $x << 1$

$$E \approx -\frac{k^2\,m\,e^4}{2n^2\hbar^2}\left(1\mp\frac{B}{k^2m^2}\,\frac{n^3\hbar^3}{e^3}\right) \mp \frac{e\hbar}{m}B\,n \approx -\frac{k^2 m\,e^4}{2\hbar^2}\,\frac{1}{n^2} \mp \frac{e\hbar}{2m}B\,n = E_n \mp \Delta E_n\,.$$

Relatívne posunutie energie stavu je $\quad \dfrac{\Delta E_n}{E_n} \approx \pm \dfrac{n^3\,\hbar^3}{m^2\,k^2 e^3}\,B$ **2 body**

b) Energia základného stavu elektrónu v atóme vodíka je

$$E_1 = -\frac{k^2 m\,e^4}{2\,\hbar^2} \approx -2{,}19\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -13{,}7\ \mathrm{eV} \qquad \textbf{1 bod}$$

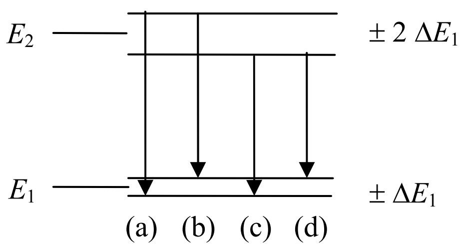
Pri prechode zo stavu $n = 2$ do stavu $n = 1$ sa vyžiari fotón s energiou rovnou rozdielu energií stavov. Jeho vlnová dĺžka je $\quad \lambda_{21} = \dfrac{h\,c}{E_2 - E_1} = \dfrac{16\,\pi\hbar^3\,c}{3\,k^2 m\,e^4} \approx 1{,}20\cdot 10^{-7}$ m. **2 body**

Hladina $n = 1$ sa rozštiepi na dve $E_1 \pm \Delta E_1$ a hladina $n = 2$ na $E_2 \pm \Delta E_2 = E_2 \pm 2\,\Delta E_1$.

Situácia je znázornená na obrázku. Oproti pôvodnej energii $E_{21} = E_2 - E_1$ nastáva zmena energie prechodu

$\Delta E_{\mathrm{a}} = 3\,\Delta E_1 \qquad \Delta E_{\mathrm{b}} = \Delta E_1$

$\Delta E_{\mathrm{c}} = -\,\Delta E_1 \qquad \Delta E_{\mathrm{d}} = -\,3\,\Delta E_1$.



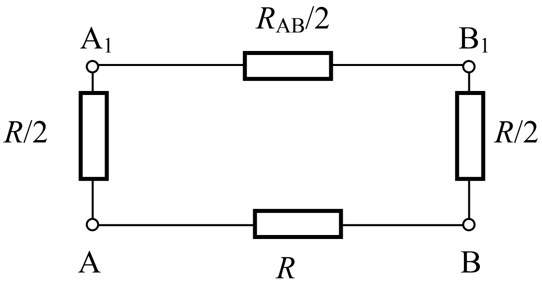
Z toho vyplýva, že v dôsledku pôsobenia magnetického poľa sa spektrálna čiara rozštiepi na štyri s energiami fotónov

$E_{21} \pm \Delta E_1 \qquad E_{21} \pm 3\,E_1$,

kde $\Delta E_1 = \dfrac{e\,\hbar}{2\,m}B \approx 9{,}2\cdot 10^{-24}\ \mathrm{J} \approx 5{,}8\cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV}$. **2 body + obrázok 1 bod**

4. Trojuholníková nekonečná sieť

a) Sieť má medzi bodmi A a B celkový odpor R_{AB}. Ak oddelíme spodnú časť, dostaneme nekonečnú trojuholníkovú sieť A_1B_1C. Keďže v porovnaní s trojuholníkom ABC sú rozmery polovičné, je aj odpor R_{A1B1} polovičný, tzn. $R_{A1B1} = R_{AB} / 2$. Celú sieť môžeme nahradiť obvodom podľa schémy. Odpor medzi bodmi A a B je

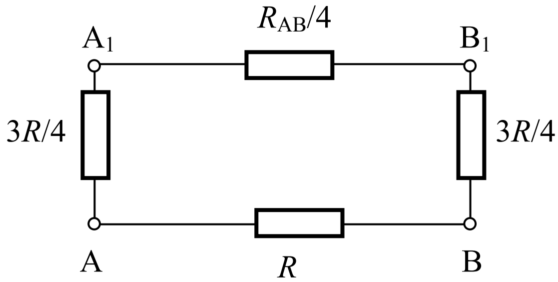


$$R_{AB} = \frac{R\left(R/2 + R_{AB}/2 + R/2\right)}{2R + R_{AB}/2}.$$

Odtiaľ dostaneme

$$R_{AB} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{17} - 3\right) \text{ a prúd } I_1 = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{2U}{R\left(\sqrt{17} - 3\right)} \approx 3{,}6 \text{ kA}$$ **3 body**

b) Ak sa priečka A_1B_1 preruší, nadväzuje na spodnú časť siete trojuholník A_2B_2C, ktorý má voči bodom A_2 a B_2 odpor $R_{A2B2} = R_{AB}/4$. Celkový odpor dostaneme podľa schémy na obrázku



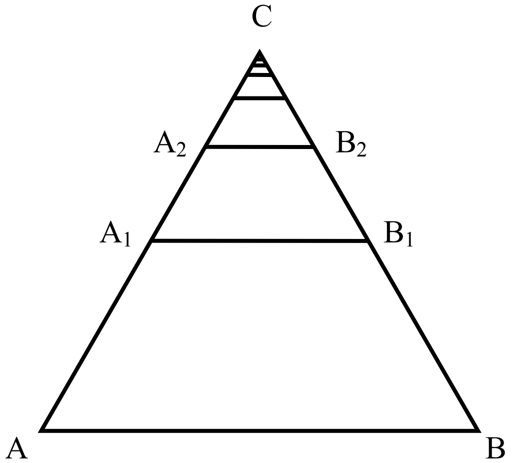
$$R_{AB}^* = \frac{R\left(3R/4 + R_{AB}/4 + 3R/4\right)}{5R/2 + R_{AB}/4}.$$

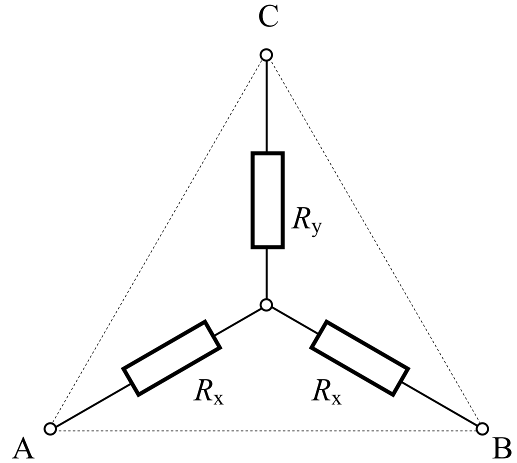
Odtiaľ dostaneme

$$R_{AB}^* = R\,\frac{\sqrt{17} + 9}{\sqrt{17} + 17} \text{ a prúd } I_1 = \frac{U}{R_{AB}^*} = \frac{U}{R}\,\frac{\sqrt{17} + 17}{\sqrt{17} + 9} \approx 3{,}2 \text{ kA}$$ **3 body**

c) Pre určenie odporu R_{AC} treba zvoliť iný postup, lebo voči bodom A a C nie je sieť kaskádovým pokračovaním, ktoré bolo možné využiť v predchádzajúcich prípadoch.

Trojuholník možno považovať za trojpól symetrický okolo zvislej osi, ktorý možno vo všeobecnosti nahradiť náhradným trojuholníkom alebo hviezdou.





Na obrázku je náhrada hviezdou symetrickou podľa zvislej osi. Odpor medzi bodmi A a C je $R_{AC} = R_x + R_y$. V ďalšom treba určiť odpory R_x a R_y.

Z časti a) poznáme R_{AB}, ktorý je podľa náhradnej schémy $R_{AB} = 2\ R_x$. Platí teda $R_x = R_{AB}/2$.

Ďalej využijeme symetriu siete. Ak pripojíme k bodom A a B rovnaký potenciál, budú mať rovnaký potenciál aj A_1B_1, A_2B_2 atď. Priečkami neprechádza preto prúd a priečky možno vyradiť. Medzi základňou AB a bodom C je potom odpor bočných strán trojuholníka zapojených paralelne $R/2$. V náhradnej schéme to zodpovedá spojeniu bodov A a B a teda spojeniu rezistorov R_x paralelne. Podľa náhradnej schémy je potom $R/2 = R_x/2 + R_y$. Medzi bodmi A a C je odpor

$$R_{AC} = R_x + R_y = \left(R_x / 2 + R_y\right) + R_x / 2 = R / 2 + R_{AB} / 4 .$$

Po dosadení dostaneme

$$R_{AC} = R\,\frac{\sqrt{17}+1}{8} \quad \text{a prúd} \quad I_3 = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{U}{R}\,\frac{8}{\sqrt{17}+1} \approx 3{,}1\ \text{kA}.$$ **4 body**

Autori úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp, Tomáš Bzdušek
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp