49. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2007/08

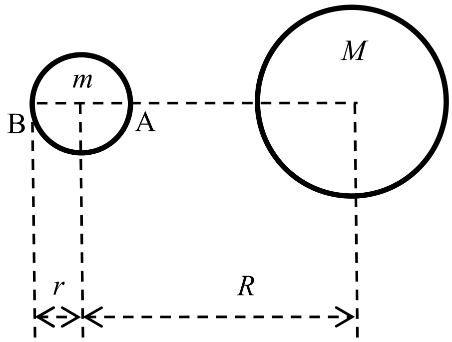
Zadania úloh krajského kola kategórie A

(*riešenia úloh nájdete na http://fpv.uniza.sk/fo a www.olympiady.sk*)

1. Viazaný pohyb

Ľubomír Konrád

Dve podobné vesmírne telesá (planéty, hviezdy, ...) vykonávajú viazaný pohyb: pohybujú sa po kruhových trajektóriách okolo spoločného ťažiska, pričom sú stále privrátené k sebe rovnakými stranami, t.j. celá sústava rotuje ako jedno pevné teleso. Pomer hmotnosti väčšieho a menšieho telesa je $\alpha = M/m$ a pomer polomeru menšieho z telies a vzájomnej vzdialenosti stredov obidvoch telies je $\beta = r/R$ (predpokladajme, že $r \ll R$).



Určte relatívny pomer $(g_B - g_A)/g_m$, kde g_A a g_B sú zrýchlenia voľného pádu na menšom z dvojice telies v bodoch A a B, ktoré sú najmenej, resp. najviac vzdialené od väčšieho telesa, a g_m je intenzita vlastného gravitačného poľa menšieho telesa na jeho povrchu. Vplyv gravitačných polí iných telies neuvažujte.

Na základe všeobecného riešenia vypočítajte číselnú hodnotu pre sústavu telies Pluto – Cháron, pre ktorú platí $\alpha = 8{,}0$ a $\beta = 0{,}03$.

2. Mraky v atmosfére *Ivo Čáp*

Keď pozorujeme mraky, vidíme, že dolná výšková hranica je pomerne ostrá. Pri vysvetľovaní javu vzniku mrakov sa využíva nasledovný idealizovaný model. Teplý vlhký vzduch z povrchu zeme stúpa nahor, pričom tlak vzduchu a teplota klesá, až kým vzduch nedosiahne rosný bod. Vtedy začne para kondenzovať a vytvára sa mrak.

Podľa idealizovanej predstavy sa vzduch rozpína adiabaticky, keďže nedochádza k tepelnej výmene. V skutočnosti k určitej tepelnej výmene dochádza, čo sa prejaví tým, že namiesto Poissonovej konštanty $\kappa = 1{,}4$ je v stavovej rovnici $p\,V^k = p_0\,V_0^k$ hodnota konštanty $k \approx 1{,}2$.

a) Pri teplote $t_0 = 20$ °C pri povrchu zeme je teplota vo výške $h_L = 10$ km letu dopravného lietadla približne $t_L \approx -40$ °C. Dokážte, že podľa uvedeného modelu klesá teplota v výškou lineárne a určte výškový gradient teploty $\mathrm{d}t\,/\,\mathrm{d}h$. Výsledok porovnajte s pozorovanými hodnotami.

b) Vzduch má pri zemi relatívnu vlhkosť $\eta_0 = 60$ %. S použitím tabuľky určte absolútnu vlhkosť ρ_{v0} vzduchu pri zemi pri uvedenej teplote t_0 a zodpovedajúci parciálny tlak p_{v0} vodnej pary. Hodnotu p_{v0} porovnajte s parciálnym tlakom nasýtenej pary pri teplote t_0.

Teplota t (°C)	-20	-10	0	10	20	100
Tlak nasýtenej pary p_n (kPa)	0,103	0,260	0,609	1,22	2,33	101

c) S narastajúcou výškou sa mení tlak a teplota vzduchu a teda aj pary obsiahnutej vo vzduchu. S použitím výsledkov z časti a) určte závislosť tlaku pary od teploty pre uvedenú modelovú stavovú zmenu. S pomocou tejto závislosti a závislosti tlaku nasýtenej pary od teploty určte výšku h_M, v ktorej sa para obsiahnutá vo vzduchu stáva nasýtenou a teda v ktorej sa začnú vytvárať mraky. (*Pozn.: Vhodné je určiť daný stav graficky z jednoduchého náčrtku grafov funkcií*).

Pri riešení použite hodnoty konštánt: molárna plynová konštanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$, molárna hmotnosť vzduchu $M_m = 29\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ a vody $M_{mv} = 18\cdot10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$, tiažové zrýchlenie $g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Pozn.: Absolútna vlhkosť je vyjadrená hmotnosťou vody obsiahnutej v 1 m^3 vzduchu. Relatívna vlhkosť je pomer absolútnej vlhkosti vzduchu k absolútnej vlhkosti nasýtenej pary pri danej teplote. Teplota, pri ktorej je relatívna vlhkosť vzduchu rovná 100 % je rosný bod. Predpokladáme, že molekuly vody vo vzduchu sa správajú ako ideálny plyn a možno ne použiť stavovú rovnicu ideálneho plynu.

3. Atóm vodíka v magnetickom poli *Ivo Čáp*

Pri experimentálnom vyšetrovaní emisného spektra plynov, ktoré sa nachádzajú v magnetickom poli, sa zistilo, že emisné čiary sa rozštiepia na skupinu veľmi blízkych oddelených čiar. Tento jav sa nazýva Zeemanov jav. Prvý pokus o vysvetlenie tohto javu vychádzal z Bohrovho modelu atómu vodíka. Aj keď je Bohrov model veľmi nedokonalý a prekonaný kvantovo-mechanickým modelom, určitú základnú predstavu o štiepení spektrálnych čiar poskytol.

Uvažujme Bohrov model atómu vodíka, v ktorom sa elektrón pohybuje okolo nehybného jadra (protónu) po kružnicovej trajektórii, pričom prípustné sú iba také trajektórie, pre ktoré je splnená kvantová podmienka pre moment hybnosti elektrónu $L = n\,\hbar$, kde n je prirodzené číslo (kvantové číslo) a $\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J·s je modifikovaná Planckova konštanta. Predpokladajme, že atóm sa nachádza v homogénnom magnetickom, pričom vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na rovinu trajektórie elektrónu.

a) Vysvetlite podstatu rozštiepenia energie stavu pre dva opačné smery obiehania elektrónu okolo jadra. Odvoďte vzťah pre hodnoty celkovej energie elektrónu na n-tej hladine a vzťah pre relatívne posunutie energetickej hladiny $\Delta E_n/E_n$, kde E_n je energia stavu bez prítomnosti magnetického poľa. *Pozn.: Magnetické pole prispieva k celkovej energii elektrónu v danom modeli členom* $E_{pm} = (e/2m)\,\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{B}$, *v našom prípade* $E_{pm} = \pm (e/2m)\,L\,B$.

b) Aká je energia (vyjadrená v eV) stavu $n = 1$ a aká vlnová dĺžka λ_{21} zodpovedá základnému prechodu elektrónu zo stavu s $n = 2$ do základného stavu $n = 1$ bez prítomnosti magnetického poľa? Na koľko blízkych čiar by sa mala rozštiepiť táto spektrálna čiara podľa predchádzajúcej Bohrovej predstavy účinkom magnetického poľa a aké sú odchýlky energie emitovaných fotónov od energie základného prechodu – situáciu znázornite vhodným obrázkom prechodov medzi hladinami energie. Predpokladajte, že prechody medzi všetkými hladinami sú možné.

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom časť b) pre dané hodnoty: konštanta v Coulombovom zákone $k = 9{,}0 \cdot 10^9$ m·F^{-1}, elementárny náboj $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, hmotnosť elektrónu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, rýchlosť svetla vo vákuu $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m·s^{-1}, $B = 1{,}00$ T, 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

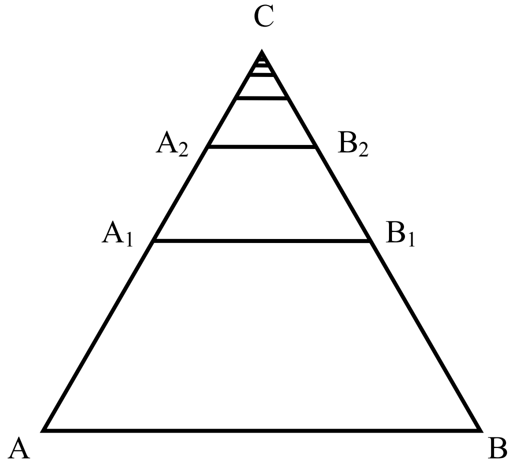
Pozn.1: Nesúlad medzi experimentálnymi výsledkami a výsledkami vyplývajúcimi z uvedeného modelu predstavovali jeden z kritických argumentov proti Bohrovej predstave. Správne výsledky poskytla až kvantová teória.

Pozn.2: Pri úpravách možno použiť približný vzťah $(1+x)^n \approx 1 + nx$, *pre* $x \ll 1$.

Pozn.3: Pre určenie vzťahu pre energiu elektrónu je jednoduchšie postupovať cestou určenia 1/r ako cestou určenia polomeru r trajektórie.

4. Trojuholníková nekonečná sieť *Tomáš Bzdušek*

Uvažujme veľmi rozľahlú rozvodnú sieť, ktorú možno modelovať idealizovanou trojuholníkovou sieťou podľa obrázku. Základný obrys predstavuje trojuholník ABC vytvorený z vodiča, ktorý má v celej sústave rovnaký merný odpor a rovnaký obsah prierezu. Odpor strany trojuholníka je R. V polovici výšky trojuholníka je priečka A_1B_1 z rovnakého vodiča, v polovici výšky takto vzniknutého trojuholníka je opäť priečka A_2B_2 atď.



a) Zdroj napätia U pripojíme k vrcholom A a B. Určte prúd I_1, ktorý prechádza zdrojom.

b) Aký prúd I_2 bude prechádzať zdrojom, ak dôjde k prerušeniu spojky A_1B_1?

c) Aký prúd I_3 bude prechádzať zdrojom, ak zdroj pripojíme k vrcholom A a C neporušenej siete?

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: U = 30 kV, R = 15 Ω.

49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy 2. kola kategórie A*
Autori úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp, Tomáš Bzdušek
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp