# 49. ročník Fyzikálnej olympiády
## v školskom roku 2007/08

Celoštátne kolo kategórie A
Banská Štiavnica 10. – 13. 4. 2008
*Riešenie teoretických úloh*

### *1. Slnečná plachta*

a) Pri pohybe družice okolo Slnka po obežnej dráhe Zeme platí

$$m\frac{v_0^2}{R_0} = G\frac{M\,m}{R_0^2}\,, \qquad (1)$$

kde $v_0$ je rýchlosť družice a $R_0$ je polomer jej trajektórie.
Družica a teda aj Zem sa pohybuje po obežnej dráhe rýchlosťou

$$v_0 = \sqrt{\frac{G\,M}{R_0}} \approx 30\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}.$$ **2 body**

b) Po rozbalení plachty pôsobí vo vzdialenosti $R$ od Slnka na družicu okrem gravitačnej sily

$$F_g = G\frac{M\,m}{R^2} = \frac{A}{R^2}\,,\ \text{kde}\ A = G\,M\,m,$$

aj tlaková sila svetla. Na plachtu dopadá žiarivý výkon $[L/(4\pi R^2)]\,(\pi r^2)$. Vzhľadom na vzťah $P = F_s\,c$, kde $F_s$ je tlaková sila na prekážku, ktorá žiarenie absorbuje a ktorá sa zrkadlovým odrazom zdvojnásobí, je výsledná tlaková sila žiarenia pôsobiaca na plachtu

$$F_s = \frac{2L}{c}\frac{\pi\,r^2}{4\pi\,R^2} = \frac{B}{R^2}\,,\quad \text{kde}\quad B = \frac{L\,r^2}{2\,c}\,.$$

Pomer tejto tlakovej sily a gravitačnej sily na družicu je

$$k = \frac{F_s}{F_g} = \frac{L\,r^2}{2\,c\,G\,M\,m} = \frac{B}{A} \approx 0{,}238.$$ **2 body**

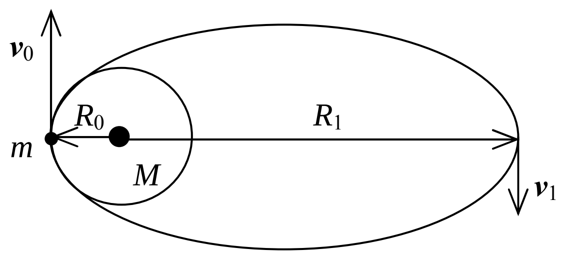
c) Výsledná príťažlivá sila, ktorá pôsobí na družicu s plachtou, je

$$F = G\frac{M\,m}{R^2} - \frac{Lr^2}{2cR^2} = \frac{K}{R^2}\,,\ \text{kde}\ \ K = G\,M\,m - \frac{L\,r^2}{2\,c} = A - B\,.$$

Keďže veľkosť tejto sily je nepriamo úmerná štvorcu vzdialenosti, platia pre pohyb družice Keplerove zákony. Družica sa bude pohybovať po eliptickej trajektórii.
Pre extrémne body trajektórie použijeme zákon zachovania momentu hybnosti a zákon zachovania mechanickej energie

$$v_0\,R_0 = v_1\,R_1,$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K}{R_0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{K}{R_1}\,.$$




Zlúčením rovníc dostaneme

$$v_0^2\,\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2} = \frac{2\,K}{m}\,\frac{R_1 - R_0}{R_1 R_0}\,,$$

odkiaľ $R_1 = \dfrac{m\,v_0^2\,R_0}{2\,K - m\,v_0^2\,R_0}\,R_0 = R_0\,\dfrac{1}{1 - 2(B/A)} \approx 1{,}91\,R_0$ **3 body**

d) Podľa tretieho Keplerovho zákona je konštantný pomer $\dfrac{T^2}{a^3} = C\,,$

kde $T$ je obežná doba a $a$ je veľkosť hlavnej polosi eliptickej trajektórie. Hodnota konštanty $C$ závisí od parametrov centrálnej sily $F = K/R^2$.

Ak je trajektória kružnica s polomerom $R$, platí pre uvedený pomer

$$C = \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi m}{K}$$

Pre elipsu s polosou $a = (R_0 + R_1)/2$ a dobou obehu družice $T_1$ dostaneme

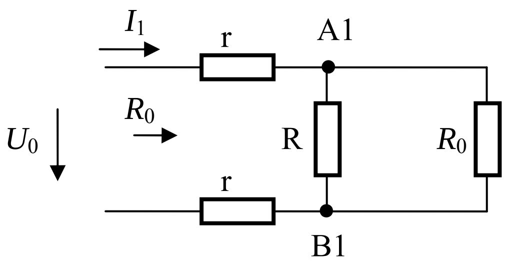
$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 m}{K}\left(\frac{R_0 + R_1}{2}\right)^3 = \frac{4\pi^2 m R_0^3}{A}\ \frac{A}{A-B}\left(\frac{R_0 + R_1}{2R_0}\right)^3 = T_0^2\ \frac{A(A-B)^2}{(A-2B)^3},$$

kde $T_0$ je doba obehu Zeme okolo Slnka (1 rok).

$$T_1 = T_0\sqrt{\frac{(1-B/A)^2}{(1-2B/A)^3}} \approx 2{,}0 \text{ roka}$$ **3 body**

## 2. *Odporová sieť*

Základná myšlienka analýzy spočíva v tom, že odpor siete voči vstupným svorkám je rovnaký ako k ľubovoľným iným svorkám, keďže za každými svorkami nasleduje nekonečný počet sekcií. Predpokladajme, že odpor siete vzhľadom na vstupné svorky je $R_0$. Potom odpor siete od svoriek A1B1 ďalej tiež $R_0$. Ak zvyšok siete od svoriek A1B1 nahradíme odporom $R_0$, možno prvú časť obvodu znázorniť nasledujúcou schémou




a) Vstupný odpor $R_0$ vyjadríme vzťahom $R_0 = 2r + \dfrac{R\,R_0}{R + R_0}$,

odkiaľ dostaneme $R_0 = r\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2R}{r}}\right)$.

Prúd v prvej sekcii je $I_1 = \dfrac{U_0}{R_0} \approx 2{,}1$ A **2 body**

Napätie na prvom odbernom mieste je $U_1 = U_0 - 2r\,I_1 = U_0\left(1 - \dfrac{2r}{R_0}\right) \approx 188$ V **1 bod**

b) Od svoriek A1B1 smerom k A2B2 je rovnaký vzťah ako v predchádzajúcom prípade s tým rozdielom, že namiesto vstupného napätia $U_0$ je $U_1$. Prúd $I_2$ je

$$I_2 = \frac{U_1}{R_0} = \frac{U_0}{R_0}\left(1 - \frac{2r}{R_0}\right) \approx 1{,}7 \text{ A}$$ **2 body**

c) Keďže sa situácia od úseku k úseku opakuje, je pomer susedných napätí rovnaký

$$k_U = \frac{U_{\mathrm{n}+1}}{U_{\mathrm{n}}} = \frac{U_1}{U_0} = 1 - \frac{2r}{R_0} \approx 0{,}82$$ **2 body**

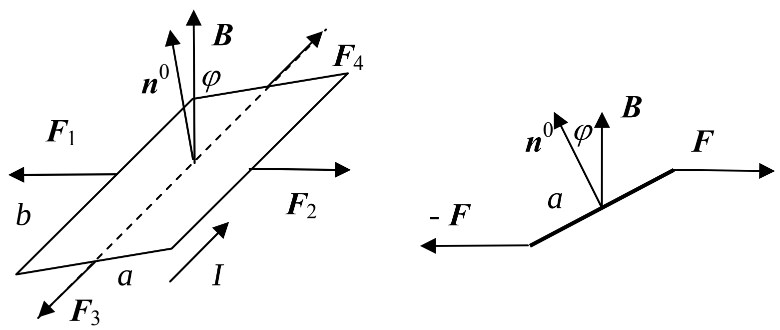
podobne pre prúdy $k_I = \dfrac{I_{\mathrm{n}+1}}{I_{\mathrm{n}}} = \dfrac{I_2}{I_1} = 1 - \dfrac{2r}{R_0} = k_U$. **1 bod**

d) Napätie na vstupe n-tej sekcie je

$$U_{\mathrm{n}} = U_0\,(k_U)^{\mathrm{n}}, \text{ odkiaľ } \mathrm{n} = \text{Celá časť}\left\{\frac{\ln(U_{\mathrm{m}}/U_0)}{\ln k_U}\right\} \approx 12$$ **2 body**

*3. Paramagnetizmus elektrónového plynu*

a)




**obrázok 2 body**

Sily, ktoré pôsobia na jednotlivé strany závitu, sú znázornené v obrázku. Sily $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$ majú opačný smer a rovnakú veľkosť a pôsobia v rovnakej priamke, preto sa ich účinok ruší pevnosťou závitu. Sila $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ majú rovnakú veľkosť $F = B\,I\,b$, pôsobia v opačnom smere a vytvárajú moment sily $M = a\,F \sin\varphi = B\,I\,ab \sin\varphi$.

S použitím uvedenej definície magnetického momentu závitu vyjadríme vektor momentu sily

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$. **2 body**

b) Pri pootočení závitu sa vykoná práca $\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\varphi$. Potenciálna energia je rovná práci potrebnej na prekonanie momentu magnetických síl pri otočení zo základnej polohy do konečnej výchylky $\varphi$

$$E_{\mathrm{p}B} = \int_{\pi/2}^{\varphi} M\,d\varphi = B m \int_{\pi/2}^{\varphi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\,mB\,\cos\varphi = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$$ **2 body**

Zo vzťahu vidno, že potenciálna energia závitu nadobúda extrémne hodnoty $\pm\, m\,B$. Keďže sa každá sústava snaží zaujať stav s minimálnou potenciálnou energiou, natáčajú sa magnetické dipóly (napr. magnetická strelka kompasu) do smeru magnetického poľa, v našom prípade $\varphi = 0$.

c) Počet elektrónov v jednotke objemu (koncentrácia elektrónov) je

$$\nu = \frac{N}{V} = \frac{n\,N_{\mathrm{A}}}{V} = \frac{m\,N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{m}}V} = \frac{\rho\,N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{m}}}$$

Elektróny sa pod účinkom tepelného pohybu v sústave rozdelia na dve skupiny s opačnou orientáciou magnetického momentu

$$\nu_1 = \nu K\,e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T} \qquad \nu_2 = \nu K\,e^{-E_2/k_{\mathrm{B}}T},$$

kde $E_{1,2} = E_0 \pm E_{\mathrm{p}B\,\mathrm{max}}$.

Výsledný magnetický moment je $\left(\sum m_i/V\right) = \left(\nu_2 - \nu_1\right)\mu_{\mathrm{e}}$ .

Súčasne musí platiť vzťah $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, z ktorého určíme konštantu úmernosti $K$.

Pre slabé magnetické pole a podmienku $E_{\mathrm{p}B\,\mathrm{max}}/k_{\mathrm{B}}T << 1$ upravíme exponenciálne vzťahy

$$\left(\sum m_i/V\right) = K\,\nu\,\mu_{\mathrm{e}}\,e^{-E_0/k_{\mathrm{B}}T}\left(e^{E_{\mathrm{p}B\max}/k_{\mathrm{B}}T} - e^{-E_{\mathrm{p}B\max}/k_{\mathrm{B}}T}\right) \approx 2K\,\nu\,\mu_{\mathrm{e}}\,e^{-E_0/k_{\mathrm{B}}T}\,\frac{E_{\mathrm{p}B\max}}{k_{\mathrm{B}}T}$$

$$\nu = K\,\nu e^{-E_0/k_{\mathrm{B}}T}\left(e^{E_{\mathrm{p}B\max}/k_{\mathrm{B}}T} + e^{-E_{\mathrm{p}B\max}/k_{\mathrm{B}}T}\right) \approx 2K\,\nu\,e^{-E_0/k_{\mathrm{B}}T},$$

odkiaľ dostaneme

$$\mu_0\left(\sum m_i/V\right) \approx \mu_0\,\nu\,\mu_{\mathrm{e}}\frac{E_{\mathrm{p}B\max}}{k_{\mathrm{B}}T} = \frac{\rho\,N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{m}}}\,\frac{\mu_0\mu_{\mathrm{e}}^2\,B}{\mu_0\,k_{\mathrm{B}}\,T} = \chi_{\mathrm{m}}\,B,$$ **1 bod**

$$\chi_{\mathrm{m}} = \frac{\rho\,N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{m}}}\,\frac{\mu_0\mu_{\mathrm{e}}^2}{k_{\mathrm{B}}\,T} = \frac{C}{T}, \text{ kde } C = \frac{\rho\,N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{m}}}\,\frac{\mu_0\mu_{\mathrm{e}}^2}{k_{\mathrm{B}}} \approx 0{,}51 \text{ K.}$$ **1 bod**

Teplote $T = 293$ K zodpovedá magnetická susceptibilita $\chi_{\mathrm{m}} = 1{,}8\cdot10^{-3}$. **1 bod**

Podmienka linearity magnetizačného vzťahu je $B << k_{\mathrm{B}}\,T/\mu_{\mathrm{e}} \approx 436$ T. **1 bod**

### *4. Refraktometer*

a) Pre uhol lomu $\delta$ svetla z hranola do kvapaliny platí Snelliov zákon

$$\sin\delta = \frac{n_1}{n_2}\sin\gamma\ .$$

Z podmienky $\sin\delta \le 1$ dostaneme podmienku lomu $\sin\gamma \le n_2/n_1$. Ak táto podmienka nie je splnená, k lomu nemôže dôjsť a nastáva úplný odraz svetla od rozhrania. Podmienka úplného odrazu je $\sin\gamma > n_2/n_1 = \sin\gamma_m$, **2 body**

kde $\gamma_m$ je hraničný uhol úplného odrazu.

Je zrejmé, že podmienka úplného odrazu je $n_1 > n_2$ (odraz od opticky redšieho prostredia).

b) Uvažujme kritický uhol úplného odrazu $\gamma_m$. Pre uhol dopadu na opačnú stenu dostaneme

$$\varepsilon = 90° - (180° - \omega - 90° + \gamma_m) = \omega - \gamma_m.$$

Pre uhol lomu do vzduchu platí $\sin\varphi = n_1 \sin\varepsilon = n_1\sin(\omega - \gamma_m)$.

Výstupný uhol je $\varphi = \arcsin\left\{n_1 \sin\left[\omega - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right]\right\}$. (1) **2 body**

Keďže musí platiť $\sin\varphi \le 1$, pre uhol hranola musí platiť

$$\omega \le \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right) \approx 95°.$$ **2 body**

c) Ak je uhol dopadu na vnútornú stenu $\gamma_m$, je $\beta = 90° - (\gamma_m + \omega/2)$. Uhol dopadu na spodnú stenu hranola je daný vzťahom

$$\sin\alpha = n_1\sin\beta = n_1\sin\left[90° - (\gamma_m + \omega/2)\right] = n_1\cos(\gamma_m + \omega/2).$$

Odtiaľ $\alpha = \arcsin\left\{n_1\cos\left[\frac{\omega}{2} + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right]\right\} \approx 2{,}5°$. **2 body**

d) Z rovnice (1) dostaneme pre hľadaný index lomu meranej kvapaliny

$$n_2 = n_1\sin\left[\omega - \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\sin\varphi_m\right)\right] = 1{,}33.$$ **2 body**

---

*49. ročník Fyzikálnej olympiády – Celoštátne kolo kategórie A – teoretické úlohy*

Autori úloh: Ivo Čáp (2,3,4), Ľubomír Konrád (1)

Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová

Redakcia: Ivo Čáp

Finančné zabezpečenie: Dotácia MŠ SR prostredníctvom Iuventy v Bratislave