49. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2007/08

Celoštátne kolo kategórie A
Banská Štiavnica 10. – 13. 4. 2008
Zadanie teoretických úloh

1. Slnečná plachta

Ľubomír Konrád

Vo filme Armagedon sa celý svet snaží zastaviť blížiaci sa asteroid, ktorého zrážka so Zemou by znamenala koniec našej civilizácie. V stredisku NASA sa zišli najlepší vedci, aby vymysleli spôsob, ako sa dostať k nebezpečnému asteroidu. Jeden z návrhov hovoril o použití družice, ktorá by mohla meniť parametre svojho pohybu použitím „solárnej plachty“.

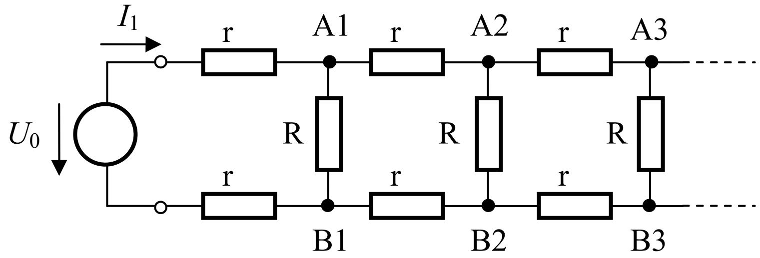
Predstavme si nasledujúcu situáciu. Okolo Slnka sa po obežnej dráhe Zeme pohybuje družica s hmotnosťou m. V istom okamihu sa na družici rozbalí „slnečná plachta“, t. j. tenká dokonale zrkadlová plocha v tvare kruhu s polomerom r. Predpokladajte, že „slnečná plachta“ je stále kolmá na smer k Slnku.

a) Určte obežnú rýchlosť pohybu družice okolo Slnka pred rozvinutím plachty.
b) Odvoďte vzťah pre silu, ktorou pôsobí žiarenie Slnka na „slnečnú plachtu“ a určte pomer tejto sily a gravitačnej sily, ktorou pôsobí na družicu Slnko, ak poznáte celkový žiarivý výkon Slnka.
c) Po rozvinutí plachty sa začne družica pohybovať po eliptickej trajektórii. Určte najväčšiu vzdialenosť od Slnka, do ktorej sa dostane družica po rozvinutí „slnečnej plachty“.
d) Určte periódu obehu družice okolo Slnka po rozvinutí „slnečnej plachty“.

Trajektóriu pohybu Zeme okolo Slnka považujte za kruhovú s polomerom $R_0 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Vplyv iných planét a telies na družicu neuvažujte. Žiarivý výkon Slnka je $L = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ W, hmotnosť Slnka $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, gravitačná konštanta $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$, rýchlosť svetla $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $m = 100$ kg, $r = 70$ m a plocha prierezu družice je zanedbateľne malá v porovnaní s plochou plachty.

2. *Odporová sieť* *Ivo Čáp*

Elektrická rozvodná sieť má charakter dvojvodičového vedenia, ku ktorému sú v pravidelných intervaloch pripojení odberatelia. Zaujíma nás, ako klesá napätie v jednotlivých miestach pripojenia pozdĺž vedenia. Pre analýzu použijeme model podľa schémy.



Uvažujme vstupné napájacie napätie $U_0 = 230$ V, odpor úseku vodiča $r = 10\ \Omega$ a odpor jednotlivej záťaže $R = 500\ \Omega$. Reťazec odberateľov je veľký a pri teoretickej analýze uvažujme modelovo reťazec nekonečný.

a) Určte prúd I_1, ktorý sieť odoberá zo zdroja a napätie U_1 na prvej záťaži (medzi uzlami A1 a B1).

b) Určte prúd I_2 vo vodiči druhej sekcie (medzi bodmi A1 a A2)

c) Určte pomer napätí $k_U = U_{n+1}/U_n$ v susedných odberných miestach (napätie U_n je medzi uzlami An a Bn) a pomer prúdov $k_I = I_{n+1}/I_n$ v susedných sekciách (prúd I_n je vo vetve medzi uzlami A(n-1) a An.

d) Zistite, v ktorom odbernom úseku je napätie 10 % napájacieho napätia U_0.

3. Paramagnetizmus elektrónového plynu *Ivo Čáp*

Paramagnetizmus sa spája so silovým účinkom magnetického poľa na magnetické dipóly. Magnetický dipól môžeme zjednodušene modelovať pravouhlým závitom s plochou S, ktorým prechádza konštantný prúd I. Uvažujme takýto závit, ktorý sa môže natáčať v magnetickom poli okolo svojej geometrickej osi. Os je rovnobežná s jednou dvojicou rovnobežných strán a je kolmá na smer vektora $\boldsymbol{B}$ magnetickej indukcie homogénneho magnetického poľa, v ktorom sa závit nachádza. Na začiatku je závit v stabilnej rovnovážnej polohe.

a) Závit vychýlime z rovnovážnej polohy o uhol φ. Nakreslite obrázok závitu, vyznačte v ňom označenia jeho strán, smer prúdu, vektor $\boldsymbol{B}$, uhol natočenia φ a vektory síl pôsobiacich na jednotlivé strany závitu. Na základe rozboru síl pôsobiacich na závit odvoďte vzťah pre vektor momentu sily $\boldsymbol{M}$, ktorý pôsobí na závit. Výsledok vyjadrite pomocou vektora $\boldsymbol{B}$ a vektora magnetického momentu závitu, definovaného vzťahom $\boldsymbol{m} = I\,S\,\boldsymbol{n}^0$, kde $\boldsymbol{n}^0$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu závitu v smere vektora magnetickej indukcie magnetického poľa vytvoreného prúdom závitu I v jeho strede.

b) Pri otáčaní závitu sa mení jeho potenciálna energia E_{pB} v magnetickom poli. Vyjadrite E_{pB} pomocou vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{m}$. Nulovú hodnotu potenciálnej energie E_{pB} uvažujte v polohe, v ktorej je $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{B}$.

Možno ukázať, že odvodené vzťahy pre moment sily a pre potenciálnu energiu nezávisia od tvaru závitu v danej rovine a magnetický moment $\boldsymbol{m}$ opisuje nielen prúdovú slučku ale aj magneticky aktívnu časticu, napr. elektrón. Voľný elektrón má veľkosť magnetického momentu $\mu_e = 9{,}273\cdot10^{-24}$ A·m^2.

Uvažujme elektrónový plyn tvorený vodivostnými elektrónmi vo vzorke platiny. Elektróny považujme za voľné častice s veľkosťou magnetického momentu μ_e v prostredí s teplotou T. S použitím úvah o maxime entropie v stave rovnováhy vyplýva, že pravdepodobnosť výskytu častice v stave s energiou E v prostredí s termodynamickou teplotou T je priamo úmerná faktoru $\exp[-E/k_BT]$, kde $k_B = 1{,}38\cdot10^{-23}$ J·K^{-1} je Boltzmannova konštanta. Predpokladajme, že v magnetickom poli zaujme elektrón jeden z dvoch rovnovážnych stavov s energiou $E = E_0 \pm E_{pB\max}$.

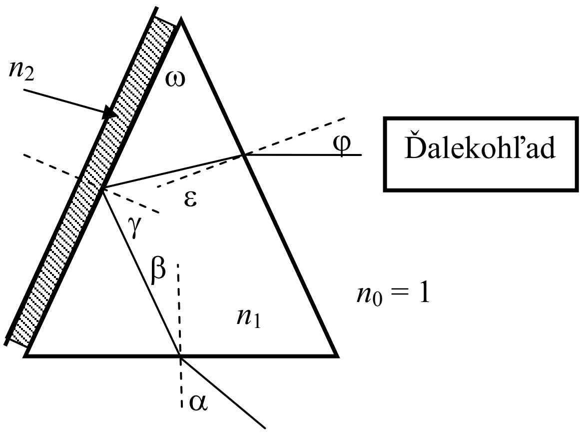
c) S použitím uvedeného pravdepodobnostného faktoru určte pre dostatočne malú hodnotu magnetickej indukcie vzťah pre magnetickú susceptibilitu χ_m elektrónového plynu v platine. *Pozn.: V paramagnetických látkach definujeme susceptibilitu približným vzťahom* $\mu_0\left(\sum \boldsymbol{m}_i/V\right) \approx \chi_m \boldsymbol{B}$, *kde výraz v zátvorke predstavuje výsledný magnetický moment na jednotku objemu.* Ukážte, že platí Curieho zákon $\chi_m = C/T$ a určte hodnotu konštanty C a hodnotu susceptibility χ_m pri teplote 20°C. Pre aké hodnoty B platí uvedený lineárny definičný vzťah pre magnetickú susceptibilitu pri uvedenej teplote?

Pozn.: pri úpravách možno použiť približný vzťah $e^x \approx 1 + x$ *pre* $x \ll 1$.

Predpokladajte, že každý atóm Pt prispieva k elektrónovému plynu jedným elektrónom. Molárna hmotnosť a hustota platiny je $195\cdot10^{-3}$ kg·mol^{-1}, $21{,}5\cdot10^3$ kg·m^{-3}, Avogadrova konštanta $N_A = 6{,}0\cdot10^{23}$ mol^{-1}, permeabilita vákua $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ kg·m·s^{-2}·A^{-2}.

4. Refraktometer *Ivo Čáp*

Na meranie indexu lomu kvapalín sa používa refraktometer, ktorý využíva vnútorný úplný odraz v optickom hranole.



Na spodnú stenu hranola s indexom lomu $n_1 = 1{,}7$ a s prierezom v tvare rovnoramenného trojuholníka s vrcholovým uhlom ω dopadá rozptýlené svetlo z rôznych smerov. Po vnútornom odraze svetlo vychádza z hranola a pozoruje sa optickým systémom ďalekohľadu. Na odrazovej stene je vrstva meranej kvapaliny s indexom lomu n_2. Pri vhodných podmienkach dochádza na vnútornej stene k úplnému odrazu. V zornom poli ďalekohľadu sa pozoruje ostré rozhranie medzi svetlom odrazeným úplným odrazom (jasná časť) a zvyšnou časťou (tmavšia časť). Rozhranie sa nastavuje do stredu zorného poľa natáčaním hranola. Z uhlu natočenia hranola sa určuje index lomu kvapaliny.

a) Aká podmienka musí byť splnená, aby došlo na vnútornej stene k úplnému odrazu svetla a aký je hraničný uhol úplného odrazu γ_m?

b) Pod akým uhlom φ vystupuje hraničný lúč úplne odrazený od vnútornej steny? Akú podmienku musí spĺňať vrcholový uhol hranola ω, ak chceme merať kvapalinu s indexom lomu $n_{2m} = 1{,}45$?

c) Určte medzný uhol dopadu α, pre ktorý dochádza k úplnému odrazu na vnútornej stene a vypočítajte jeho hodnotu pre index lomu kvapaliny n_{2m} a $\omega = 60°$.

d) Aký je index lomu kvapaliny n_2, ak je hraničný uhol pozorovaného rozhrania v poli ďalekohľadu $\varphi_m = 14{,}6°$ a $\omega = 60°$?