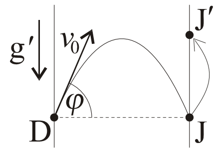
49. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2007/08

Riešenia úloh krajského kola kategórie B

1. ***Vrh na šikmej ploche*** *Matúš Medo*



a) Pri kĺzaní puku po naklonenej rovine naň smerom nadol pôsobí zložka tiažového zrýchlenia veľkosti $g \sin \alpha$ v smere "dole kopcom" – kolmo na spojnicu Danky a Janky. Iné sily na puk nepôsobia. Ak si situáciu nakreslíme tak, ako na obrázku vpravo, vidieť, že puk koná šikmý vrh. Jeho začiatočná rýchlosť má vodorovnú zložku $v_0 \cos \varphi$, na ňu kolmá je zložka $v_0 \sin \varphi$. Pre pohyb puku v smere vrstevnice kopca platí

$$x = v_0\, t\, \cos\varphi ,$$

kolmo na vrstevnicu (v smere spádnice)

$$y = v_0\, t\, \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\, g \sin\alpha\, t^2 .$$

Po vylúčení času t dostaneme rovnicu

$$y = x\, \mathrm{tg}\varphi - \frac{1}{2}\, g \sin\alpha\, \frac{x^2}{v_0^2\, \cos^2\varphi} .$$ **3 body**

Ide o kvadratickú závislosť, ktorej grafom je parabola. **1 bod**

Pozn.: Rovnicu možno upraviť na základný tvar rovnice paraboly

$$y = -\,k\, (x - x_{\mathrm{m}})^2 + y_{\mathrm{m}} ,$$

kde $k = \dfrac{g \sin\alpha}{2 v_0^2\, \cos^2\varphi}$, $x_{\mathrm{m}} = \dfrac{v_0^2\, \cos\varphi \sin\varphi}{g \sin\alpha}$, $y_{\mathrm{m}} = \dfrac{v_0^2\, \sin^2\varphi}{2\, g \sin\alpha}$

b) Ak chce Danka dopraviť puk k Janke, musí pre nejaký čas t byť $x = L$, $y = 0$. Riešením takto získanej sústavy rovníc (z prvej rovnice vyjadríme čas t a dosadíme do druhej) dostaneme $\sin 2\varphi = \dfrac{gL \sin\alpha}{v_0^2}$. (1)

Číselným dosadením dostaneme $\varphi \approx 15°$. **2 body**

Podmienka reálneho riešenia vzťahu (1) je $\sin 2\varphi \le 1$. Odtiaľ plynie podmienka pre L v tvare $L \le \dfrac{v_0^2}{g \sin\alpha} \approx 29$ m. **1 bod**

c) Nech Janka stojí na kopci o h vyššie ako Janka. Riešime rovnakú úlohu, ako v bode a), rozdielna je iba koncová poloha puku $x = L$, $y = h$. Dosadením času t z prvej rovnice do druhej dostávame $h = L\ \mathrm{tg}\varphi - \dfrac{L^2}{2\, L_m}\, \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$,

kde $L_{\mathrm{m}} = v_0^2/(g \sin \alpha)$. Úlohou je zistiť, pri akej hodnote uhla φ nadobúda h maximum, a aká je hodnota tohto maxima. Pomocou rovnosti zo zadania vieme upraviť posledný vzťah do tvaru $h = L\, y - \dfrac{L^2}{2\, L_m}\, y^2 - \dfrac{L^2}{2\, L_m}$,

kde sme z dôvodu prehľadnosti tg φ označili y. Získali sme tak kvadratický výraz pre h (v závislosti od y), ktorého maximum sa dá nájsť viacerými spôsobmi.

Jedna z možností je úprava na základný tvar paraboly.

$$h = -\frac{L^2}{2L_\mathrm{m}}\left(y - \frac{L_\mathrm{m}}{L}\right)^2 + \frac{L_m}{2} - \frac{L^2}{2L_m}.$$

Odtiaľ je vidieť, že maximálna výška h sa dosiahne vtedy, keď je zátvorka (ktorá vo vzťahu vystupuje so záporným znamienkom) nulová. Vtedy $y = L_\mathrm{m}/L$ a teda

$$h_{\max} = \frac{L_m}{2} - \frac{L^2}{2L_m} = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha} - \frac{L^2\, g\sin\alpha}{2v_0^2} \approx 11 \text{ m.}$$ **2 body**

Zátvorka je nulová pre $y = \mathrm{tg}\varphi = L_m/L$. Tomu zodpovedá uhol

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{L_m}{L} = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0^2}{L\,g\sin\alpha}\right) \approx 63°.$$ **1 bod**

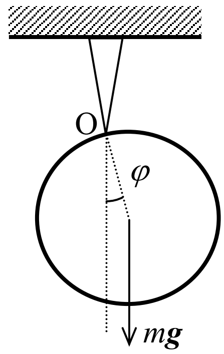
2. *Malé kmity obruče*

Ľubomír Konrád

a) Napíšeme pohybovú rovnicu kmitavého pohybu pre prvý druh kmitov:

$$I_1\,\varepsilon = -m\,g\,R\,\sin\varphi$$

(pozri obrázok),



pričom $I_1 = I_{01} + mR^2 = 2mR^2$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$.

Po dosadení a úprave $\ddot{\varphi} + \frac{g}{2R}\varphi = 0$, resp. $\varepsilon = -\omega_0^2\varphi$.

Keďže $\omega_0^2 = g/2R$, dostaneme pre periódu kmitov vzťah

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$ **2 body**

V druhom prípade postupujeme analogicky, ale

$$I_2 = I_{02} + mR^2 = 3mR^2/2.$$

Pre periódu kmitov potom dostaneme

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$ **2 body**

Zrejme $T_1 > T_2$, takže v druhom prípade kmitá obruč „rýchlejšie“. **2 body**

b) Hľadaný pomer períód je potom $T_1 : T_2 = 2 : \sqrt{3}$. **2 body**

c) Uvedený pomer nezávisí od hmotnosti obruče ani od jej polomeru. **2 body**

3. *Elektróny v koaxiálnej sústave*

Ivo Čáp

a) Medzi vnútorným a vonkajším valcom prekoná elektrón potenciálový rozdiel U. Ak je vonkajší valec pripojený k zápornému pólu zdroja, dochádza k brzdeniu elektrónov vystupujúcich z vnútorného valca. V medznom prípade je práca pri brzdení rovná práve výstupnej kinetickej energii elektrónu

$$\frac{1}{2}m\,v_0^2 = e\,U_0\text{ , odkiaľ } v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} \approx 2{,}0\cdot 10^6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \qquad (1)$$ **2 body**

b) Ak využijeme vzťah pre intenzitu elektrického poľa vo vnútri sústavy $E = k\,\frac{1}{r}$,

je potenciál vzhľadom na nulový potenciál na vnútornom valci

$$\varphi(r) = \int_{r_1}^{r} E \,\mathrm{d}r = k \int_{r_1}^{r} \frac{1}{r} \mathrm{d}r = k \ln(r / r_1) \qquad (2)$$

Pri napätí U medzi valcami a $r = r_2$ je $k = \dfrac{U}{\ln(r_2 / r_1)}$.

Po dosadení do (2) dostaneme $\varphi(r) = \dfrac{U}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r / r_1)$ **3 body**

c) Ak sa elektrón pohybuje po kružnici, musí byť rýchlosť v_1 konštantná a dostredivá sila elektrického poľa rovná sile odstredivej

$$e E_1 = m \frac{v_0^2}{r_1} . \qquad (3)$$

Intenzita elektrického poľa pri povrchu vnútorného valca pri napätí U_1 je

$$E_1 = \frac{U_1}{\ln(r_2 / r_1)} \frac{1}{r_1} . \qquad (4)$$

Z (3), (4) a (1) dostaneme $U_1 = 2 U_0 \ln(r_2 / r_1) \approx 36{,}7$ V. **2 body**

d) Ak vystúpi elektrón z povrchu vnútorného valca šikmo, pohybuje sa po zakrivenej trajektórii, dosiahne maximálnu vzdialenosť r_m a vracia sa nazad k povrchu vnútorného valca. V bode s najväčšou vzdialenosťou od osi má nulovú radiálnu zložku rýchlosti a pohybuje sa kolmo na spojnicu s osou. *Pozn.: Keďže ide o radiálne pole typu 1/r a nie $1/r^2$ ako pri pohybe planét okolo Slnka, nepredstavuje trajektória uzatvorenú elipsu a neplatí 3. Keplerov zákon.*

Pre pohyb elektrónu v elektrickom poli platí zákon zachovania mechanickej energie a zákon zachovania momentu hybnosti. Pre bod výstupu z vnútorného valca a bod s maximálnou vzdialenosťou od osi dostaneme

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - e\,\varphi(r_1) = \frac{1}{2} m v_m^2 - e\,\varphi(r_m)$$

$$m v_0 r_1 \sin\alpha = m v_m r_m .$$

Po dosadení za potenciál, pričom $U = -U_0$, a s použitím vzťahu (1) dostaneme po vylúčení v_m rovnicu pre r_m v tvare napr.

$$1 - \left(\frac{r_1}{r_m}\right)^2 \sin^2\alpha = -\frac{1}{\ln(r_2 / r_1)} \ln\left(\frac{r_1}{r_m}\right).$$

Tuto rovnicu môžeme riešiť numerickou metódou.

Pre uhol $\alpha = 45°$ napíšeme rovnicu v tvare

$$1 - 0{,}5\, x^2 + 0{,}62 \ln x = 0,$$

kde $1/\ln(r_2/r_1) = 1/\ln 5 \approx 0{,}62$ a $x = r_1/r_m \in (0{,}2;\ 1{,}0)$. Priamym dosadením sa približujeme k hodnote, pre ktorú má ľavá strana $f(x)$ nulovú hodnotu

$x = 0{,}200$	0,210	0,205	0,206	0,207	0,208	
$f(x) = -0{,}02$	0,008	-0,006	-0,003	$-5 \cdot 10^{-5}$	0,003	

Výsledok je s dostatočnou presnosťou $x \approx 0{,}207$ a teda

pre $\alpha = 45°$ je $r_m \approx 4{,}83$ mm. **3 body**

4. *D/A prevodník* *Ivo Čáp*

a) $(1,1,0,1,0,0,1,0)_2 \rightarrow 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 = 128 + 64 + 16 + 2 = 210$ V.
235 V = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \rightarrow (1,1,1,0,1,0,1,1)_2$

4 body

b) Obvod tvoria štyri paralelné vetvy, na ktorých je spoločné napätie *U*. Súčet prúdov vetiev je nulový (1. Kirchhoffov zákon)

$$\frac{U}{R} + \frac{U - U_0}{R_0} + \frac{U - U_1}{R_1} + \frac{U - U_2}{R_2} = 0 \; .$$

Odtiaľ dostaneme výstupné napätie (pre zjednodušenie zápisu použijeme označenie vodivostí rezistorov $G = 1/R$)

$$U = \frac{G_0 U_0 + G_1 U_1 + G_2 U_2}{G + G_0 + G_1 + G_2} \; .$$

Pre realizáciu prevodníka musí platiť pre číselné hodnoty

$$2^0 = \left\{ \frac{G_0 U_\mathrm{R}}{G + G_0 + G_1 + G_2} \right\}, \; 2^1 = \left\{ \frac{G_1 U_\mathrm{R}}{G + G_0 + G_1 + G_2} \right\}, \; 2^2 = \left\{ \frac{G_2 U_\mathrm{R}}{G + G_0 + G_1 + G_2} \right\}.$$

Zo vzájomných pomerov dostaneme

$G_1 = 2\,G_0$ a $G_2 = 2\,G_1 = 4\,G_0$

a $G = G_0 \left(\{U_\mathrm{R}\} - 7 \right)$.

Odtiaľ dostaneme

$R_0 = R \left(\{U_\mathrm{R}\} - 7 \right) \approx 30$ kΩ, $R_1 = 2\,R_0 = 60$ kΩ, $R_2 = 4\,R_0 = 120$ kΩ.

6 bodov

49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori úloh:	Ivo Čáp (3, 4), Ľubomír Konrád (2), Matúš Medo (1)
Recenzia:	Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia:	Ivo Čáp
Finančné zabezpečenie:	Vydanie hradené z dotácia MŠ SR prostredníctvom Iuventy v Bratislave

© Slovenská komisia Fyzikálnej olympiády, 2008