49. ročník Fyzikálnej olympiády

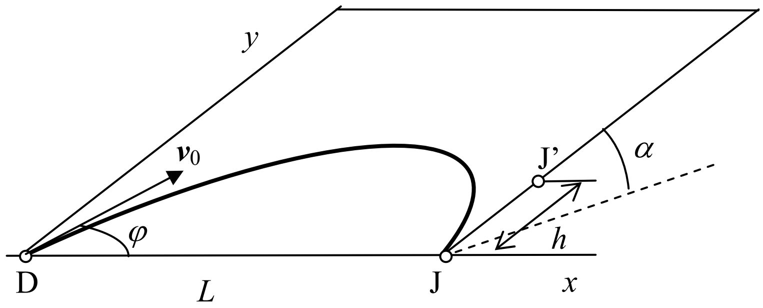
v školskom roku 2007/08

Zadania úloh krajského kola kategórie B
(riešenia úloh: www.olympiady.sk, http://fpv.uniza.sk/fo)

1. Vrh na šikmej ploche

Matúš Medo

Na šikmom svahu so sklonom α vzhľadom na vodorovnú rovinu stoja v rovnakej výške Danka a Janka vo vzájomnej vzdialenosti L. Oddeľuje ich plocha hladkého ľadu. Danka k Janke posiela po ľade puk počiatočnou rýchlosťou v_0.



a) Odvoďte rovnicu trajektórie puku v rovine (x, y) svahu. O akú krivku ide?

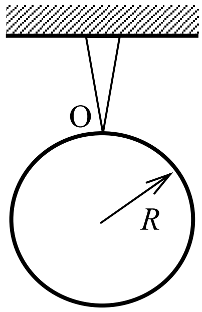
b) Aký uhol φ výstrelu puku vzhľadom na vodorovnú spojnicu DJ má Danka zvoliť, aby sa puk dostal k Janke? Akú podmienku musí spĺňať vzdialenosť L, aby mala úloha riešenie?

c) O akú najväčšiu vzdialenosť h vyššie pozdĺž spádnice môže Janka postúpiť, aby jej bola Danka schopná puk poslať pri danej rýchlosti výstrelu v_0? Aký uhol φ_m musí v takom prípade zvoliť?

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty: $L = 15$ m, $\alpha = 30°$, $v_0 = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.
Pre zjednodušenie predpokladajte, že trenie medzi pukom a ľadom je zanedbateľne malé.
Pomôcka: Pri úpravách môže byť užitočný vzťah $1/\cos^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$.

2. *Malé kmity obruče* *Ľubomír Konrád*

Tenká obruč s hmotnosťou m a polomerom R môže vykonávať kmitavý pohyb okolo bodu O (pozri obrázok). Najskôr necháme obruč kmitať v rovine obrázka a potom v rovine kolmej na obrázok. Moment zotrvačnosti obruče vzhľadom na os prechádzajúcu stredom obruče kolmo na jej rovinu je $I_{01} = mR^2$, moment zotrvačnosti obruče vzhľadom na os prechádzajúcu stredom obruče a ležiacu v rovine obruče je $I_{02} = mR^2/2$.



a) Odvoďte vzťahy pre periódu kmitov v obidvoch prípadoch. V ktorom prípade kmitá obruč „rýchlejšie“ (s kratšou periódou)?
b) V akom pomere sú periódy uvedených druhov kmitov?
c) Ako sa zmení pomer z časti b) úlohy, ak zmeníme hmotnosť alebo polomer obruče?

Uvažujeme malé kmity s výchylkami $\alpha \ll 1$ rad, pre ktoré platí približný vzťah $\sin\alpha \approx \alpha$.

3. *Elektróny v koaxiálnej sústave* *Ivo Čáp*

Koaxiálna sústava sa skladá z dvoch dlhých vodivých valcov so spoločnou osou. Vonkajší valec má vnútorný polomer r_2, vnútorný má vonkajší polomer r_1. V priestore medzi valcami je vákuum. Z vnútorného valca sú emitované elektróny do všetkých smerov.
K valcom je pripojený nastaviteľný zdroj elektrického napätia U. Keď prekročí veľkosť napätia medzi elektródami určitú hodnotu U_0, prestane zdrojom prechádzať elektrický prúd.

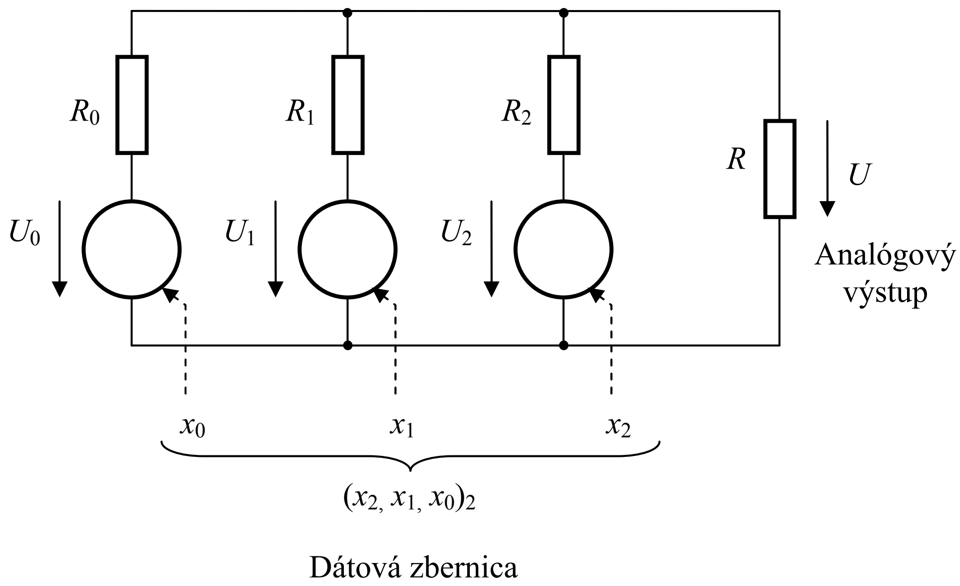
a) Aká je maximálna rýchlosť v_0, ktorou opúšťajú elektróny povrch vnútorného valca?
b) Odvoďte vzťah $\varphi = [U / \ln(r_2/r_1)] \ln(r/r_1)$ pre závislosť elektrického potenciálu vo vnútri koaxiálnej sústavy ako funkciu vzdialenosti r od osi.
c) Pri akej hodnote napätia U_1 sa môže elektrón pohybovať po kružnici tesne pri povrchu vnútorného valca rýchlosťou v_0 podľa časti a)?
d) Uvažujme elektróny, ktoré vystupujú z vnútorného valca pripojeného ku kladnému pólu zdroja s napätím U_0 rýchlosťou v_0, určenou v časti a), v rovine kolmej na os sústavy a pod rôznymi uhlami α vzhľadom na kolmicu k povrchu valca. Určte maximálnu vzdialenosť r_m od osi, do ktorej sa elektróny dostanú počas svojho pohybu pre uhol $\alpha_1 = 45°$.

Pri riešení použite hodnoty: hmotnosť a náboj elektrónu $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $Q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $U_0 = 11{,}4$ V, $r_1 = 1{,}0$ mm, $r_2 = 5{,}0$ mm.
Pri riešení časti d) zostavte všeobecnú rovnicu pre výpočet hodnoty r_m a pre dané hodnoty ju riešte vhodnou numerickou metódou (stačí výsledok s presnosťou na dve platné číslice).

Pozn.: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. Pre elektrickú intenzitu v sústave valcov platí $E = k\,\frac{1}{r}$ (úloha domáceho kola FO49B1/5).

4. D/A prevodník *Ivo Čáp*

V elektronických obvodoch na spracovanie signálu a stretávame s A/D a D/A prevodníkmi (analógovo – digitálny a digitálno – analógový), ktoré slúžia na prevod nameraného napätia na digitálnu informáciu v dvojkovej sústave spracovateľnú počítačom, napr. 13 V = $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \rightarrow (1,1,0,1)_2$, alebo digitálnej informácie z počítača v dvojkovej sústave na výslednú hodnotu signálu v desiatkovej sústave, napr. $(1,0,1,0)_2 \rightarrow 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10$ V a opačne.



Na obrázku je principiálna schéma trojbitového D/A prevodníka. Obvod tvoria spínané zdroje napätia U_0 až U_2, ktoré nadobúdajú dve úrovne napätia $U_n = x_n U_R$, kde U_R je konštantné referenčné napätie a x_n sú údaje s hodnotou 0 alebo 1 z dátovej zbernice, a váhové rezistory R_n. Výstup predstavuje zaťažovací rezistor R, na ktorom sa získava napätie $U = (4x_2 + 2x_1 + x_0)$ V, zodpovedajúce dátovej hodnote (x_2, x_1, x_0) z výstupu počítača.

a) Určte napätie, ktoré zodpovedá osembitovej dátovej hodnote $(1,1,0,1,0,0,1,0)_2$ a opačne určte osembitovú dátovú hodnotu napätia $U = 235$ V.

b) Určte hodnoty váhových rezistorov R_0 až R_2 prevodníka v schéme, ak je odpor záťaže $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$ a hodnota referenčného napätia $U_R = 10$ V, aby číselná hodnota výstupného napätia U prevodníka zodpovedala príslušnej dátovej hodnote $(x_2, x_1, x_0)_2$ v dvojkovej sústave.

Pozn.: Pre zjednodušenie zápisu možno požívať vodivosť G = 1/R namiesto odporu R.

49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*
Autori úloh: Ivo Čáp (3, 4), Ľubomír Konrád (2), Matúš Medo (1)
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp

Finančné zabezpečenie: Vydanie hradené z dotácia MŠ SR prostredníctvom Iuventy v Bratislave