# 49. ročník Fyzikálnej olympiády

### v školskom roku 2007/08

### *Riešenie úloh 1. kola kategórie C*

**1. *Minigolf*** *Ivo Čáp*

a) Pri valivom pohybe nedochádza k stratám mechanickej energie. Súčet kinetickej a potenciálnej energie zostáva konštantný.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = m g h ,$$

kde $\omega_0 = 2\, v_0/d$ a $h = R\,(1 - \cos\alpha)$. Požadovaná minimálna rýchlosť je

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \dfrac{4I}{m d^2}}} = \sqrt{\frac{10}{7} g h} = \sqrt{\frac{10}{7} g R (1 - \cos\alpha)} \approx 2{,}0 \text{ m/s}$$ **4 body**

b) Pre tento prípad musí mať guľôčka na hornom okraji prekážky potrebnú počiatočnú rýchlosť $v_1$ nasledujúceho šikmého vrhu, pričom platí $\omega_1 = 2\, v_1/d$

$$\frac{1}{2} m v_{01}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{01}^2 = m g h + \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

$$v_{01} = \sqrt{v_1^2 + \frac{10}{7} g h} \; .$$

Pre šikmý vrh platí

$$x = v_1 t \cos\alpha \qquad y = h + v_1 t \sin\alpha - (1/2)\, g t^2.$$

Pre bod dopadu platí $x = x_1$ a $y = 0$

$$v_1^2 = \frac{g x_1^2}{2 \left(h + x_1 \operatorname{tg}\alpha\right) \cos^2\alpha} \; .$$

Pôvodná rýchlosť valivého pohybu

$$v_{01} = \sqrt{\frac{g x_1^2}{2 \left(h + x_1 \operatorname{tg}\alpha\right) \cos^2\alpha} + \frac{10}{7} g h} \; .$$

Po dosadení krajných hodnôt za $x_1$ najprv $r_1 + d/2$ a potom $r_1 + D - d/2$ dostaneme číselné výsledky

$v_{01} \approx 4{,}42$ m/s, $v_{02} \approx 4{,}64$ m/s. **5 bodov**

Relatívny rozdiel rýchlostí je približne 5 %. Znamená to, že trafiť sa pri údere do tak úzkeho intervalu, je mimoriadne náročné a vyžaduje značnú skúsenosť. **1 bod**

## 2. *Halleyova kométa* — *Ivo Čáp*

a) Pre pohyb Zeme okolo Slnka po kružnicovej trajektórii platí podmienka rovnováhy gravitačnej a odstredivej sily

$$G\,\frac{M_\mathrm{S}\,M_\mathrm{Z}}{R^2} \;=\; M_\mathrm{Z}\,\omega^2\,R\,,$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je uhlová rýchlosť pohybu Zeme okolo Slnka.

$$M_\mathrm{S} \;=\; \frac{4\,\pi^2}{G\,T^2}\,R^3 \;\approx\; 2{,}0\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$ **3 body**

b) Pre pohyb kométy platí zákon zachovania mechanickej energie, zákon zachovania momentu hybnosti vzhľadom na stred Slnka a Keplerove zákony. Periodická kométa sa pohybuje po elipse. Ak uvážime bod (1) trajektórie kométy najbližší k Slnku a bod (2) najvzdialenejší od Slnka, platia rovnice

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 - G\,\frac{M_\mathrm{S}\,m}{R_1} \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - G\,\frac{M_\mathrm{S}\,m}{R_2}$$

$$R_1\,m\,v_1 \;=\; R_2\,m\,v_2$$

$$\left(\frac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{Z}}\right)^2 \;=\; \left(\frac{a_\mathrm{H}}{a_\mathrm{Z}}\right)^3 \;=\; \left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_\mathrm{Z}}\right)^3$$

Z tretej rovnice (3. Keplerov zákon) dostaneme

$$R_2 \;=\; 2\,R_\mathrm{Z}\left(\frac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{Z}}\right)^{2/3} - R_1 \;\approx\; 35{,}3\ \mathrm{AU} \;=\; 5{,}30\cdot 10^{12}\ \mathrm{m}.$$ **4 body**

c) Z prvých dvoch rovníc dostaneme

$$v_1 \;=\; \sqrt{2\,G\,M_\mathrm{S}\,\frac{R_2}{R_1\left(R_2 + R_1\right)}}$$

$$v_2 \;=\; \frac{R_1}{R_2}\,v_1 = \sqrt{2\,G\,M_\mathrm{S}\,\frac{R_1}{R_2\left(R_2 + R_1\right)}}$$

Číselne $v_1 \approx 54{,}6$ km/s a $v_2 \approx 0{,}91$ km/s. **3 body**

***3. Vznik kolóny na diaľnici*** *Milan Grendel*

a) Čas predbiehania určíme z celkovej relatívnej dráhy, ktorú musí predbiehajúci kamión uraziť vzhľadom na predbiehaný, a relatívnej rýchlosti obidvoch kamiónov

$$t_\mathrm{p} = \frac{2l_1 + l_2 + l_3}{v_{03} - v_{01}} \approx 59\ \mathrm{s}.$$

Dráha predbiehajúceho kamiónu počas predbiehania $d_\mathrm{p} = v_{03}\, t_\mathrm{p} \approx 1{,}5\ \mathrm{km}$ **2 body**

b) Za čas predbiehania na utvorí v rýchlom pruhu kolóna z $N$ vozidiel s dĺžkou $L = N\, d_1$, kde $d_1 = v_{03}\, \Delta t_1$ je vzdialenosť vozidiel v kolóne. Tieto vozidlá boli pôvodne na úseku vozovky $L^* = N\, d_0$, kde $d_0 = v_{02}\, \Delta t_0$ je pôvodný rozstup. Za čas vytvorenia kolóny $t_\mathrm{p}$ sa úsek $L^*$ skráti na $L$ rozdielovou rýchlosťou prvého a posledného vozidla tvoriacej sa kolóny $L = L^* - (v_{02} - v_{03})\, t_\mathrm{p}$. Po dosadení za $L$ a $L^*$ určíme $N$ a určíme dĺžku kolóny

$$L = \frac{v_{03}\, \Delta t_1}{v_{02}\, \Delta t_0 - v_{03}\, \Delta t_1} \left(v_{02} - v_{03}\right) t_\mathrm{p} \approx 473\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

Rýchlosť narastania dĺžky kolóny

$$v_\mathrm{K} = \frac{L}{t_\mathrm{p}} = \frac{v_{03}\, \Delta t_1}{v_{02}\, \Delta t_0 - v_{03}\, \Delta t_1} \left(v_{02} - v_{03}\right) \approx 8{,}0\ \mathrm{m/s}.$$ **2 body**

c) Zatiaľ čo na konci sa vozidlá hromadia a kolóna narastá rýchlosťou $v_\mathrm{K}$, vpredu sa vozidlá rozbiehajú, čo predstavuje úbytok jej dĺžky rýchlosťou, ktorú určíme podobnou úvahou ako v predchádzajúcom prípade

$$v'_\mathrm{K} = \frac{v_{03}\, \Delta t_1}{v_2\, \Delta t_2 - v_{03}\, \Delta t_1} \left(v_2 - v_{03}\right) = 26\ \mathrm{m/s}$$ **2 body**

Keďže je $v_\mathrm{K}' > v_\mathrm{K}$, musí sa kolóna za určitý čas rozplynúť. Po uvoľnení cesty sa kolóna začne zmenšovať rýchlosťou $v_\mathrm{K}' - v_\mathrm{K}$, pričom sa rozplynie za čas

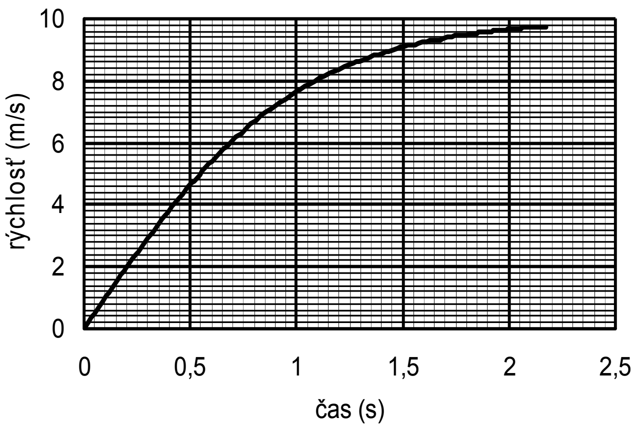
$$\frac{L}{v'_\mathrm{K} - v_\mathrm{K}} \approx 24\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

**4. *Analýza videozáznamu pádu*** *Ivo Čáp*

a) Rýchlosť sa určuje zo zobrazeného grafu:

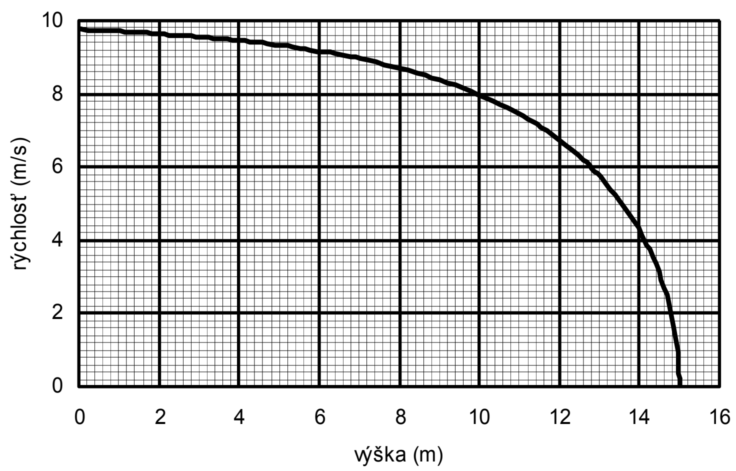
- z grafu odčítame hodnoty výšky pre jednotlivé časy, hodnoty usporiadame do tabuľky (výhodné je využiť tabuľkový kalkulátor, napr. MS EXCEL) a potom zo susedných údajov určíme okamžitú rýchlosť $v = \Delta h/\Delta t$. Vypočítané hodnoty vynesieme do grafu (body budú mať veľký rozptyl vzhľadom na nepresnosť odčítania hodnôt z grafu výšky) a preložíme spojitú krivku
- druhá možnosť spočíva v tom, že rýchlosť predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu dráhy, v zvolenom bode zostrojíme dotyčnicu a určíme jej smernicu $\Delta h/\Delta t$ a takto postupujeme bod po bode.

Výsledný graf rýchlosti má nasledujúci priebeh.




**zdôvodnenie a graf 2 body**

Použitím hodnôt pre výšku a rýchlosť pre určitý čas zostrojíme závislosť rýchlosti od výšky.

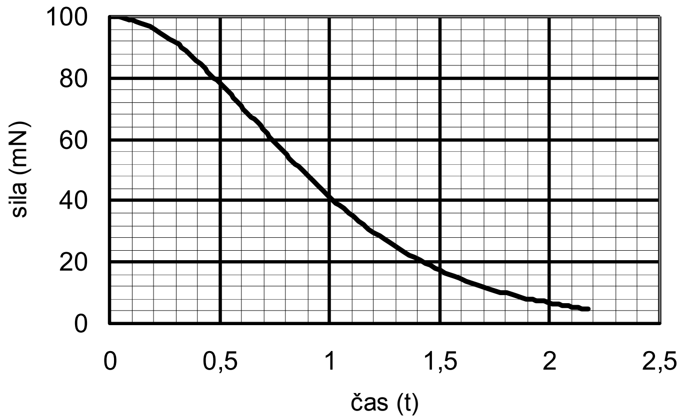



**graf 1 bod**

Z grafov vidno, že loptička padá z výšky $h_0 = 15$ m a na zem dopadne za čas $t_d \approx 2{,}2$ s rýchlosťou $v_d \approx 9{,}8$ m/s.

Keby padala loptička voľným pádom bez pôsobenia odporu vzduchu, dopadla by za čas $t_{d0} = \sqrt{2h_0/g} = 1{,}75$ s rýchlosťou $v_{d0} = \sqrt{2gh_0} \approx 17{,}1$ m/s. **1 bod**

b) Z grafu časovej závislosti rýchlosti môžeme rovnakým spôsobom určiť pre jednotlivé časy zrýchlenie $a = \Delta v/\Delta t$. Tieto hodnoty vynásobíme hmotnosťou a získame hodnoty výslednej sily $F$. Výsledky zakreslíme do grafu závislosti sily od času.



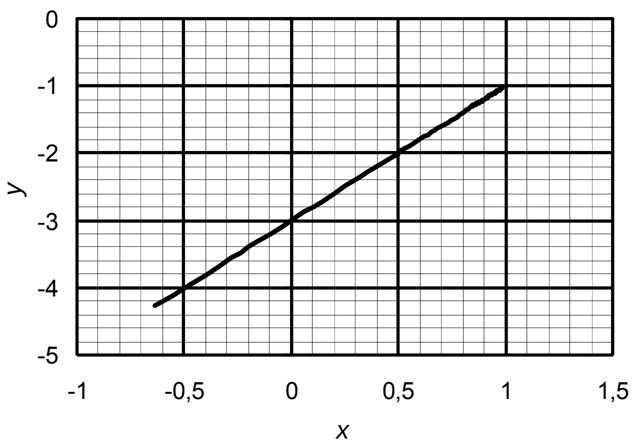

**graf 1 bod**

Z grafu vidno, že na začiatku je $F_0 \approx 100$ mN, a teda zrýchlenie $a_0 \approx 10$ m/s$^2$, čo zodpovedá tiažovému zrýchleniu $g$.

S narastajúcou rýchlosťou výsledná sila klesá k nule, čo znamená, že proti pôsobeniu tiažovej sily narastá sila odporu prostredia závislá od rýchlosti. **1 bod**

c) Ak od výslednej sily odpočítame tiažovú silu $F_g = m\, a_0$, dostaneme čistú odporovú silu, ktorej závislosť od rýchlosti predpokladáme v tvare $F_o = k\, v^n$. Hľadať parametre nelineárnej funkcie je problematické (možno využiť špeciálne programy regresie na kalkulačkách alebo v tabuľkových kalkulátoroch), uvedenú funkciu však možno jednoducho linearizovať logaritmovaním $\log F_o = \log k + n \log v$. Ak zavedieme súradnice grafu $y = \log F_o$ a $x = \log v$ a označíme $q = \log k$, získame závislosť $y = n\,x + q$, čo je rovnica priamky so smernicou $n$. Zistiť úsek $q$ na osi $y$ a smernicu $n$ je jednoduchá úloha.

Z uvedených grafov zostavíme potrebnú tabuľku, určíme hodnoty $x$ a $y$ a zostrojíme graf




**zdôvodnenie a graf 2 body**

Z grafu určíme smernicu $n = 2$ a úsek na osi $y$ je $q = -3$, a teda $k = 1{,}0\cdot 10^{-3}$. Odporová sila je opísaná vzťahom $F_o = k\, v^2$, kde $k = 1{,}0\cdot 10^{-3}$ kg·m$^{-1}$. Ide o aerodynamický odpor.

d) Ak by loptička padala dostatočne dlho, ustálila by sa konštantná rýchlosť pádu zodpovedajúca rovnováhe tiažovej a odporovej sily $m\, g = k\, v_m^2$. **1 bod**

Maximálna rýchlosť je $v_m = \sqrt{m\, g / k} \approx 10$ m/s.

Z grafu rýchlosti od výšky určíme pre rýchlosť $0{,}9\, v_m \approx 9$ m/s výšku $h_1 \approx 6{,}8$ m. **1 bod**

## 5. *Účinnosť tepelného stroja* — *Ľubomír Mucha*

Zo stavovej rovnice ideálneho plynu $pV = nR\,T$ vyplýva, že teplota $T$ je úmerná súčinu $pV$, ktorý zodpovedá v $p$-$V$ diagrame ploche obdĺžnika určeného počiatkom a daným bodom. Z obrázku je zrejmé, že najnižšia teplota zodpovedá bodu 1 a najvyššia bodu 3. **1 bod**

Užitočná práca zodpovedá ploche obmedzenej krivkou deja (dva trojuholníky)

$$W = (p_3 - p_1)\,(V_3 - V_1)\,/\,4.$$ **2 body**

Teplo sa dodáva plynu pri zväčšovaní teploty, a to znamená iba počas deja 1-2-3.

$$Q = \Delta U + W_{13} = C_V\,(T_3 - T_1) + (V_3 - V_1)\,(p_3 + p_1)/2,$$ **2 body**

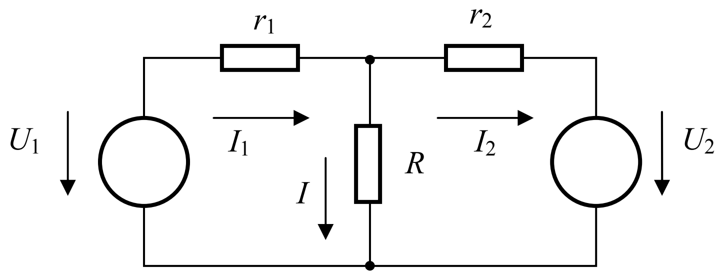
kde $C_V = (3/2)\,nR$ je tepelná kapacita pri konštantnom objeme.

Účinnosť deja je $\eta = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(p_3 - p_1)(V_3 - V_1)}{3\,(p_3 V_3 - p_1 V_1) + (p_3 + p_1)(V_3 - V_1)}$ **2 body**

Výraz upravíme s použitím lineárneho vzťahu pre stavy 1 a 3 $p_3/p_1 = V_3/V_1$ a podmienky pre teploty extrémnych stavov $T_3/T_1 = k$. S použitím stavovej rovnice dostaneme $V_3/V_1 = \sqrt{k}$ .

$$\eta = \frac{\left(\dfrac{T_3}{T_1} - \dfrac{V_3}{V_1}\right)\left(\dfrac{V_3}{V_1} - 1\right)}{6\left(\dfrac{T_3}{T_1} - 1\right)\dfrac{V_3}{V_1} + 2\left(\dfrac{T_3}{T_1} + \dfrac{V_3}{V_1}\right)\left(\dfrac{V_3}{V_1} - 1\right)} = \frac{(\sqrt{k} - 1)^2}{8\,(k-1)} = \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1}.$$ **3 body**

## 6. *Elektrický obvod* — *Ľubomír Mucha*




a) Pre obvod platia rovnice:

$$I_1 - I_2 - I = 0, \qquad r_1 I_1 + R\,I = U_1, \qquad r_2 I_2 - R\,I = -U_2.$$ **3 body**

Odtiaľ dostaneme

$$I_1 = \frac{U_1\,(R + r_2) - U_2\,R}{r_1(R + r_2) + r_2\,R}, \quad I_2 = \frac{U_1\,R - U_2\,(R + r_1)}{r_2(R + r_1) + r_1\,R}, \quad I = \frac{U_1 r_2 + U_2 r_1}{R\,(r_1 + r_2) + r_2\,r_1}.$$ **3 body**

b) Pre nulový prúd spotrebičom $I = 0$ musí byť splnená podmienka $\dfrac{U_1}{r_1} = -\dfrac{U_2}{r_2}$. **2 body**

c) Pre nulový prúd druhým zdrojom $I_2 = 0$ musí byť splnená podmienka

$$U_2 = U_1\,\frac{R}{R + r_1}.$$ **2 body**

---


**49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy 1. kola kategórie C***

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 2, 4), Milan Grendel (3), Ľubomír Mucha (5, 6), Mária Kladivová (7)
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp