49. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2007/08

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

1. *Minigolf*

Ľubomír Konrád

Predpokladajme, že hráč udelil loptičke rýchlosť s veľkosťou v a horný okraj dráhy opúšťa loptička rýchlosťou s veľkosťou v_0 pod uhlom α k horizontu.

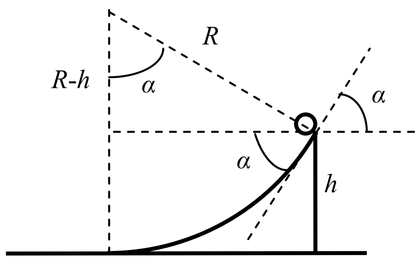
Zo zákona zachovania energie vyplýva

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = m g h + \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 \ ,$$ **2 body**

pričom $\omega = v/r$, $\omega_0 = v_0/r$ a $J = (2/5)\, m\, r^2$, kde m je hmotnosť loptičky a r je jej polomer.

Po dosadení a úprave dostaneme pre rýchlosť loptičky na hornom okraji dráhy vzťah

$$v_0 = \sqrt{v^2 - \frac{10}{7} gh} \ .$$ **1 bod**



Pre uhol α podľa obrázka platí

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} \ ,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R} .$$ **2 body**

Po opustení horného okraja dráhy koná loptička šikmý vrh. Ak zvolíme horný okraj dráhy za začiatok súradnicovej sústavy, pre polohu loptičky v čase t platí

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$ **2 body**

Pri dopade na druhú časť dráhy platí $y = 0$, odkiaľ čas pohybu šikmým vrhom je $t = 2v_0\sin\alpha/g$. Potom dĺžka šikmého vrhu je

$$x_\mathrm{m} = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha .$$

Podľa zadania má byť splnená rovnosť $x_\mathrm{m} = d$, t.j.

$$\frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = d .$$

Po dosadení za v_0, sin α a cos α dostaneme rovnicu

$$\frac{2}{g}\left(v^2 - \frac{10}{7}gh\right)\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}\frac{R-h}{R} = d \ ,$$

odkiaľ pre hľadanú rýchlosť máme

$$v = \sqrt{\frac{R^2 gd}{2(R-h)\sqrt{2Rh-h^2}} + \frac{10}{7}gh} \approx 4{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **3 body**

2. *Astronaut* *Ľubomír Konrád*

Na kozmickú loď pôsobia dve sily: gravitačná príťažlivá sila Zeme F_1 a sila napínajúca lano N, pričom

$$F_1 = G\frac{MM_Z}{R_1^2}, \qquad \textbf{1 bod}$$

kde M je hmotnosť lode, M_Z je hmotnosť Zeme, R_1 je polomer trajektórie lode a G je gravitačná konštanta. V dôsledku pôsobenia týchto síl sa loď pohybuje po kružnici. Ak je uhlová rýchlosť lode ω, pohybuje sa loď s dostredivým zrýchlením $a_1 = \omega^2 R_1$, ktoré mu udeľuje výslednica síl F_1 a N. Podľa zákona sily potom platí

$$G\frac{MM_Z}{R_1^2} - N = M\omega^2 R_1 . \qquad \textbf{2 body}$$

Na kozmonauta pôsobí sila napínajúca lano N a gravitačná príťažlivá sila Zeme F_2, pre ktorú platí

$$F_2 = G\frac{mM_Z}{R_2^2}, \qquad \textbf{1 bod}$$

kde m je hmotnosť kozmonauta a R_2 je polomer jeho trajektórie. V dôsledku pôsobenia týchto síl sa loď pohybuje po kružnici s polomerom R_2 a uhlovou rýchlosťou ω, teda sa pohybuje s dostredivým zrýchlením $a_2 = \omega^2 R_2$. Pre sily pôsobiace na kozmonauta môžeme písať

$$G\frac{mM_Z}{R_2^2} + N = m\omega^2 R_2 . \qquad \textbf{2 body}$$

Z pohybových rovníc lode a kozmonauta vylúčime spoločnú uhlovú rýchlosť

$$\left(G\frac{MM_Z}{R_1^2} - N\right)\frac{1}{MR_1} = \left(G\frac{mM_Z}{R_2^2} + N\right)\frac{1}{mR_2}, \qquad \textbf{1 bod}$$

resp.

$$\frac{GM_Z}{R_1^2}\,\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2} = N\,\frac{mR_2 + MR_1}{mM} .$$

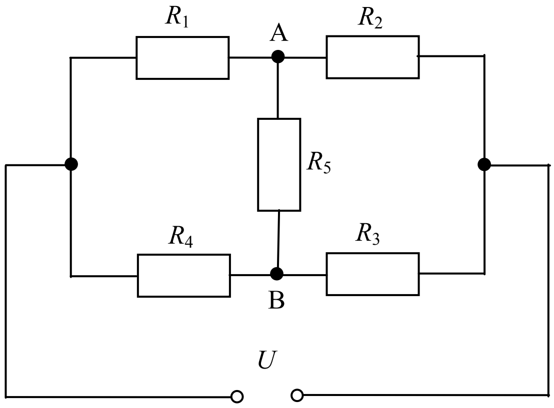
Použijeme vzťah pre tiažové zrýchlenie $g = G\,M_Z / R_1^2$ a približný vzťah $R_2^3 - R_1^3 \approx 3\,R_1\,R_2\,l$. Pri úprave ďalej uvažujeme $R_2 = R_1 + l \approx R_1 \approx R$. Silu N vyjadríme vzťahom

$$N = m\,g\,\frac{(R_1 + l)^3 - R_1^3}{(R_1 + l)^2}\,\frac{M}{M\,R_1 + m(R_1 + l)} \approx m\,g\,\frac{3l\,M}{R\,(M + m)} \approx 29\ \text{mN}. \qquad \textbf{3 body}$$

3. Elektrický obvod

Ľubomír Konrád

Schému zo zadania úlohy môžeme nahradiť ekvivalentnou schémou (pozri obrázok). Ide o jednoduchý mostík, ktorý tvoria rezistory s rovnakými odpormi



$R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100\ \Omega$.

a) Zo symetrie obvodu (vetvy R_1, R_2 a R_4, R_3 sú rovnaké) vyplýva, že potenciály bodov A a B sú rovnaké a teda napätie medzi bodmi A a B je rovné nule. To znamená, že rezisotorom R_5 neprechádza prúd. **3 body**

b) Rezistormi s odpormi R_1 a R_2 prechádza prúd veľkosti $I_1 = U / (R_1 + R_2) = U / 2R$. Rovnako veľký prúd prechádza aj rezistormi s odpormi R_3 a R_4. Pretože algebrický súčet prúdov v uzle musí byť rovný nule, je celkový prúd súčtom týchto dvoch prúdov a platí $I = 2I_1 = U / R$.
Celkový odpor sústavy rezistorov je potom $R_c = U / I = R = 100\ \Omega$. **5 bodov**

c) Výsledky nezávisia od veľkosti napätia použitého zdroja. **2 body**

4. *Plyny vo valci* *Ľubomír Konrád*

Na začiatku platí pre tlak vo valci

$$p = \frac{n_1 R T_1}{V_1} = \frac{n_2 R T_2}{V_2},$$

kde n_1 a n_2 je látkové množstvo plynov v jednotlivých častiach nádoby. Odtiaľ

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{T_1}{T_2}\frac{V_2}{V_1}, \qquad p(V_1 + V_2) = R(n_1 T_1 + n_2 T_2).$$

Po vyrovnaní teplôt bude teplota vo valci T_0 a tlak p_0, pričom platí

$$p_0(V_1 + V_2) = R(n_1 + n_2)T_0.$$

Potom

$$\frac{p_0}{p} = \frac{(n_1 + n_2)T_0}{n_1 T_1 + n_2 T_2} = \frac{T_2 V_1 + T_1 V_2}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)} T_0.$$ **4 body**

Teplotu T_0 nájdeme pomocou zákona zachovania energie. Vnútorná energia ideálneho plynu nezávisí od objemu. Je daná vzťahom $U = C_V.T$. Zrejme platí

$$C_{V1} T_1 + C_{V2} T_2 = (C_{V1} + C_{V2})T_0.$$

Potom

$$T_0 = \frac{C_{V1} T_1 + C_{V2} T_2}{C_{V1} + C_{V2}}.$$ **4 body**

Pre tlak plynov vo valci platí

$$\frac{p_0}{p} = \frac{T_2 V_1 + T_1 V_2}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)} T_0 = \frac{T_2 V_1 + T_1 V_2}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)} \frac{C_{V1} T_1 + C_{V2} T_2}{C_{V1} + C_{V2}}.$$ **2 body**

49. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy krajského kola kategórie C***

Autor úloh: Ľubomír Konrád
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp
Finančné zabezpečenie: Vydanie hradené z dotácie MŠ SR prostredníctvom Iuventy v Bratislave