# 49. ročník Fyzikálnej olympiády

**v školskom roku 2007/08**

***Riešenie úloh 1. kola kategórie D***

## *1. Bezpečná vzdialenosť na diaľnici* *Ivo Čáp*

a) Ak začne prvé vodidlo brzdiť so zrýchlením $a_1$, začne sa s rovnakým zrýchlením zmenšovať vzdialenosť vozidiel $\Delta x = d_0 - (1/2)\, a_1\, t^2$. Za reakčný čas $\Delta t_0$ by poklesla vzdialenosť na nulu pri počiatočnom rozstupe

$$d_{01} = (1/2)\, a_1\, \Delta t_0^2 = 7{,}0 \text{ m}.$$

Ak nemá dôjsť k nárazu ešte pred začiatkom brzdenia, musí byť počiatočný odstup väčší ako 7 m. **2 body**

b) Vzájomná vzdialenosť vozidiel počas brzdenia, ak obidve brzdením zastanú, je

$$d = d_0 + v_0^2/2a_1 - (v_0\, \Delta t_0 + v_0^2/2a_2)$$

Pre rýchlosť $v_{01}$ dostaneme $d_1 \approx$ 18,7 m, pre rýchlosť $v_{02}$ je $d_2 \approx$ - 30,7 m.

Pri nižšej rýchlosti stačia obidve vozidlá zastať vo vzájomnej vzdialenosti $d_{m1} \approx$ 19 m bez vzájomného ohrozenia. **2 body**

V prípade vyššej rýchlosti dôjde k nárazu.

Otázka je, či je predné vozidlo v okamihu nárazu ešte v pohybe, alebo či už zastalo. Súradnica prvého vozidla v okamihu jeho zastavenia je $x_1 = d_0 + v_{02}^2/2a_1 \approx 233$ m. Čas do zabrzdenia je $t = v_{02}/a_1 \approx 8{,}73$ s. Za tento čas je súradnica druhého vozidla $x_2 = v_{02}\, t - (1/2)\, a_2\, (t - \Delta t_0)^2 \approx$ 215 m. Z toho vyplýva, že druhé vozidlo narazí do prvého už stojaceho. Rýchlosť druhého vozidla, a tým aj rýchlosť nárazu, je po prekonaní vzdialenosti $x_1$ k stojacemu prvému vozidlu

$$v_2 = \sqrt{v_{02}^2 - 2\, a_2\, (x_1 - v_{02}\, \Delta t_0)} \approx 12 \text{ m/s} \approx 43 \text{ km/h}.$$ **2 body**

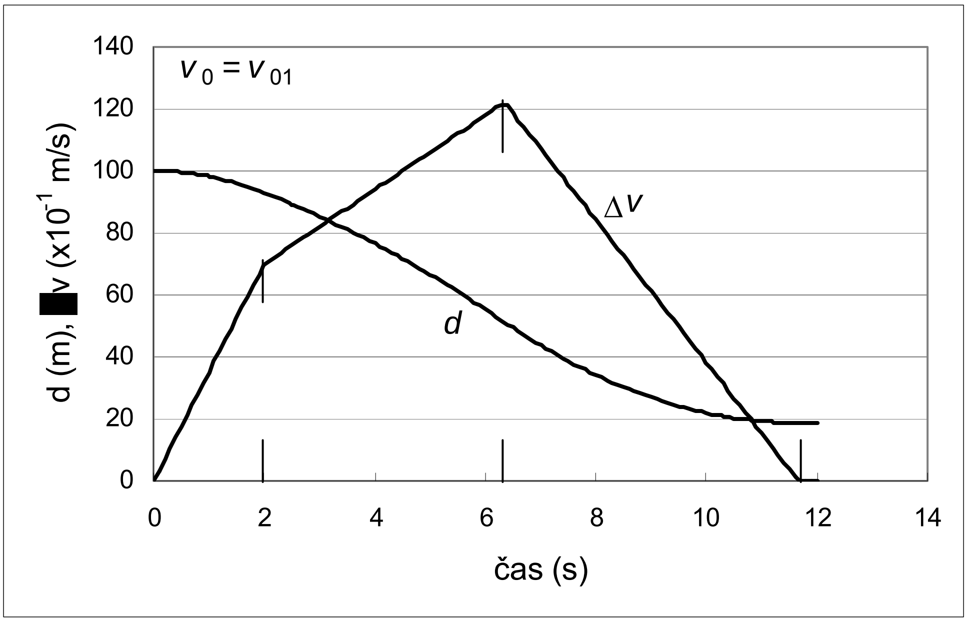
c) Pre kreslenie grafov vyjadríme vzťahy pre určenie súradnice a rýchlosti

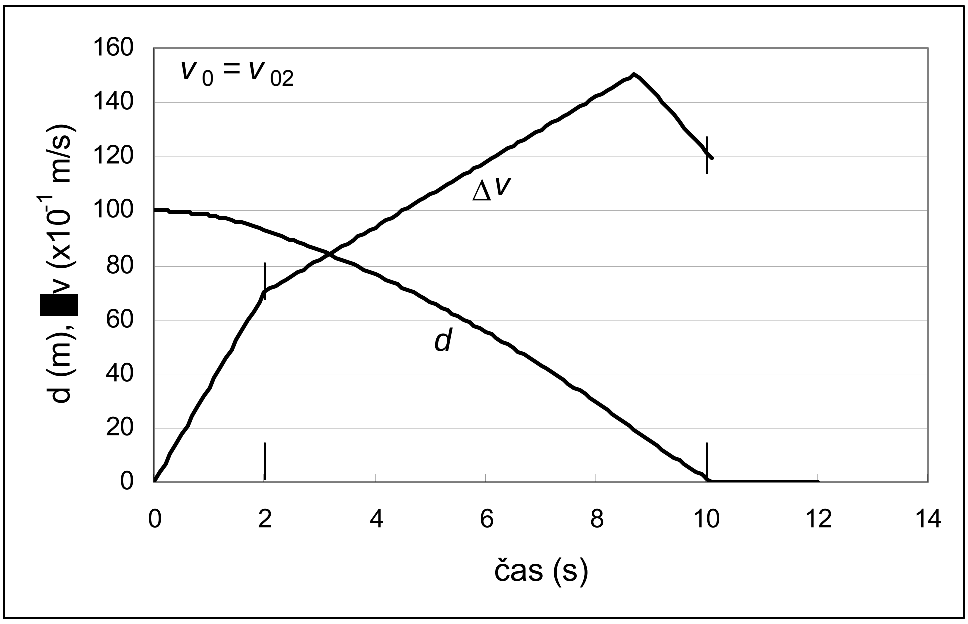
$$x_1 = d_0 + v_0\, t - (1/2)\, a_1\, t^2 \qquad x_2 = v_0\, t - (1/2)\, a_2\, (t - \Delta t_0)^2$$

$$v_1 = v_0 - a_1\, t \qquad v_2 = v_0 - a_2\, (t - \Delta t_0)$$

Vzájomná vzdialenosť $d = x_1 - x_2$ a veľkosť vzájomnej rýchlosti $\Delta v = v_2 - v_1$.

Z grafov pre jednotlivé počiatočné rýchlosti $v_{01}$ a $v_{02}$ dostávame výsledky, ktoré potvrdzujú teoretické výpočty. Pre vhodné rozmery grafu sú hodnoty rýchlosti vynásobené 10 (hodnoty na zvislej osi zodpovedajú vzdialenosti v metroch a desaťnásobku rýchlosti v metroch za sekundu).




**Každý graf 2 body**

**2. Autá na moste** *Ľubomír Mucha*

a) V prvom úseku $t \in (0;\, 8{,}3\ \text{s})$ klesá vzdialenosť kvadraticky s časom, tzn. prvý automobil brzdí s konštantným zrýchlením $a_1$.

V druhom úseku $t \in (8{,}3\ \text{s};\, 16{,}0\ \text{s})$ klesá vzdialenosť rovnomerne, teda autá sa pohybujú rovnomerne s rôznymi rýchlosťami.

V treťom úseku $t \in (16{,}0\ \text{s};\, 24{,}3\ \text{s})$ je závislosť kvadratická, čo zodpovedá brzdeniu druhého vozidla so zrýchlením $a_1$ pred vstupom na most a rovnomernému pohybu prvého vozidla po moste rýchlosťou $v_1$.

V úseku $t \in (24{,}3\ \text{s};\, 38{,}3\ \text{s})$ je vzdialenosť konštantná, tzn. obidve vozidlá idú s rovnakou rýchlosťou $v_1$ po moste.

V úseku $t \in (38{,}3\ \text{s};\, 43{,}9\ \text{s})$ prvé auto po dosiahnutí konca mosta zrýchľuje so zrýchlením $a_2$.

V úseku $t \in (43{,}9\ \text{s};\, 54{,}3\ \text{s})$ idú obidve autá konštantnou ale rôznou rýchlosťou.

V úseku $t \in (54{,}3\ \text{s};\, 59{,}9\ \text{s})$ druhé auto po dosiahnutí konca mosta zrýchľuje so zrýchlením $a_2$ na rýchlosť $v_0$.

Pre $t > 59{,}9$ s sa obidve autá pohybujú rovnakou rýchlosťou $v_0$ po prekonaní mosta.

**3 body**

b) V prvom úseku sa prvé auto pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom a vzdialenosť medzi vozidlami tak klesá podľa kvadratickej závislosti

$$d = d_0 - \frac{1}{2} a_1 t^2 .$$

Pre $t_1 = 8{,}3$ s a zodpovedajúcu vzdialenosť z grafu $d_1 \approx 365$ m dostaneme

$$a_1 = \frac{2(d_0 - d_1)}{t_1^2} \approx 1{,}0\ \text{m·s}^{-2}.$$

Z tretieho úseku možno overiť aj zrýchlenie druhého auta pri brzdení. Pre časy $t_2 = 16{,}0$ s a $t_3 = 24{,}3$ s určíme z grafu príslušné vzdialenosti $d_2 \approx 300$ m a $d_3 \approx 266$ m

$$a_1^* = \frac{2(d_2 - d_3)}{(t_3 - t_2)^2} \approx 1{,}0\ \text{m·s}^{-2}.$$

Obidve autá brzdia s rovnakým zrýchlením.

Podobne určíme zrýchlenie po opustení mosta. Na 5. úseku k časom $t_4 = 38{,}2$ s a $t_5 = 43{,}9$ s určíme z grafu vzdialenosti $d_4 \approx 266$ m a $d_5 \approx 290$ m a

$$a_2 = \frac{2\,(d_5 - d_4)}{(t_5 - t_4)^2} \approx 1{,}5\ \text{m·s}^{-2}.$$

Podobne je tomu aj s druhým autom v 7. úseku. Pre časy $t_6 = 54{,}3$ s a $t_7 \approx 59{,}9$ s určíme vzdialenosti vozidiel $d_6 \approx 377$ m a $d_7 \approx 400$ m určíme

$$a_2^* = \frac{2\,(d_7 - d_6)}{(t_7 - t_6)^2} \approx 1{,}5\ \text{m·s}^{-2}.$$

Zrýchlenie obidvoch vozidiel po opustení mosta je rovnaké.

**4 body**

c) Za čas $t_1$ nadobudne pri zrýchlení spomaleného pohybu $a_1$ vozidlo rýchlosť

$$v_1 = v_0 - a_1\, t_1 \;\approx\; 16{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \;\approx\; 60\ \mathrm{km/h}.$$ **2 body**

Táto rýchlosť predstavuje obmedzenú rýchlosť na moste.

Prvé vozidlo vstupuje na most v čase $t_1$ a opúšťa ho v čase $t_4$ (začiatok jeho zrýchleného pohybu). Za tento čas urazí rýchlosťou $v_1$ vzdialenosť

$$L = v_1\,(t_4 - t_1) \;\approx\; 500\ \mathrm{m},$$

čo predstavuje dĺžku mosta. **1 bod**

### 3. *Vyletujúca loptička* *Ľubomír Mucha*

a) Úlohu je najlepšie riešiť v sústave spojenej s vozíkom. Vtedy loptička koná zvislý vrh nahor, a teda dopadne na miesto, z ktorého bola vystrelená. Pre dráhu loptičky môžeme písať rovnicu $y = v_\mathrm{h} t - \frac{1}{2} g t^2$. V momente dopadu platí rovnica $v_\mathrm{h}\, t_\mathrm{d} - \frac{1}{2} g\, t_\mathrm{d}^2 = 0$, z ktorej dostane pre čas dopadu vzťah $t_\mathrm{d} = \frac{2 v_\mathrm{h}}{g}$. Pre dráhu, ktorú prejde vozík a tiež aj loptička vo vodorovnom smere, platí $d = v_\mathrm{v}\, t = 2\,\frac{v_\mathrm{v} v_\mathrm{h}}{g}$. Číselne pre dané hodnoty $d = 8{,}2$ m.

**4 body**

b) Ak pôsobí trenie medzi vozíkom a cestou bude sa vozík spomaľovať, a keďže loptička svoju vodorovnú rýchlosť nemení, vozík bude zaostávať za loptičkou. Potom loptička dopadne buď do prednej časti vozíka, alebo vozík zaostane za loptičkou a loptička dopadne pred ním. Pre treciu silu môžeme písať $F_\mathrm{t} = f\, m\, g$, a odtiaľ z pohybovej rovnice $F = m\, a$ pre spomalenie platí $a = -f\, g$. Pre dráhu vozíka platí $s = v_\mathrm{v}\, t - \frac{1}{2} f\, g\, t^2$. Pre čas dopadu $t_\mathrm{d}$ dostaneme po úprave dráhu vozíka $s = 2\frac{v_\mathrm{v}\, v_\mathrm{h}}{g} - 2 f\, \frac{v_\mathrm{h}^2}{g}$.

Pre prípad $d - s = \frac{L}{2}$ loptička dopadne presne na začiatok vozíka, čo zodpovedá hodnote koeficientu trenia

$$f_0 = \frac{g\, L}{4\, v_\mathrm{h}^2} \approx 0{,}10.$$

Dopad na koniec vozíka zodpovedá koeficientu trenia $f_2 = f_0$. Pre koeficient trenia $f_1 < f_0$ dopadne loptička na vozík, v prípade $f_3 > f_0$ dopadne loptička pred vozík.

**6 bodov**

### 4. *Guľa namiesto padáka* *Ľubomír Konrád*

a) Pri rovnomernom páde gule je splnená podmienka silovej rovnováhy sily odporu prostredia, tiaže a vztlaku

$$\frac{1}{2} c\, \rho_\mathrm{v}\, S\, v^2 \;=\; m_0\, g + \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\rho_\mathrm{g} - \rho_\mathrm{v}\right) g\,,$$

odtiaľ dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,m_0}{c\,\pi\,\rho_v}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{4\pi}{3m_0}\left(\rho_g-\rho_v\right)r\right]}\,. \qquad (1) \qquad \textbf{2 body}$$

b) Minimum určíme z podmienky nulovej derivácie (podľa nápovede v zadaní)

$$-\frac{2}{r_m^3}+\frac{4\pi}{3m_0}\left(\rho_g-\rho_v\right) = 0\,,$$

odkiaľ dostaneme

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{2\pi\left(\rho_g-\rho_v\right)}}$$

Hustota gule zodpovedajúca tomuto vzťahu je

$$\rho_g = \rho_v + \frac{3m_0}{2\pi}\frac{1}{r_m^3}\,.$$

Dosadením $r_m$ do vzťahu (1) získame zodpovedajúcu rýchlosť $v_m$

$$v_m = \frac{1}{r_m}\sqrt{\frac{6m_0\,g}{\pi\,c\,\rho_v}}$$

Pre danú minimálnu rýchlosť $v_{m1}$ pádu dostaneme potrebný polomer gule

$$r_{m1} = \frac{1}{v_{m1}}\sqrt{\frac{6m_0\,g}{\pi\,c\,\rho_v}} \approx 10{,}5\ \text{m}$$

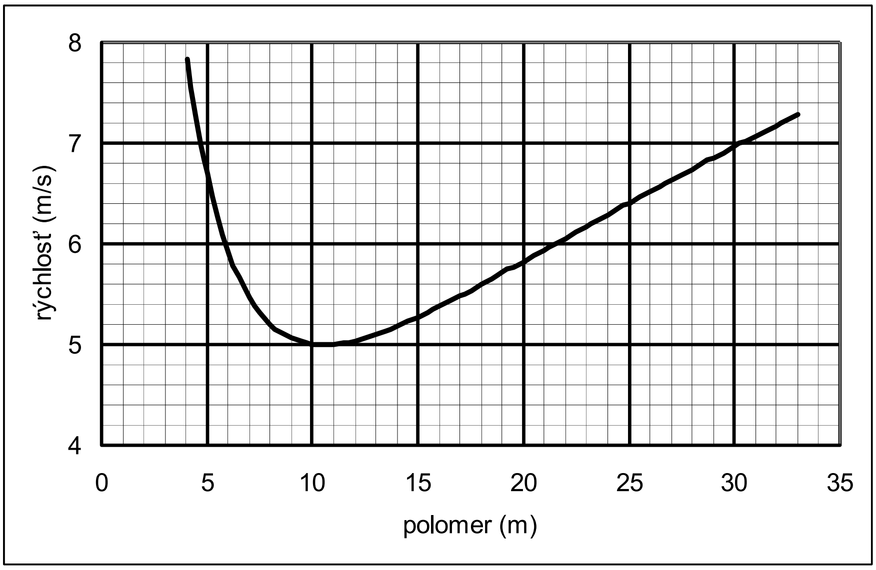
a hustota gule by musela mať hodnotu $\rho_g \approx 1{,}23\ \text{kg·m}^{-3}$.

**3 body**

c) Graf závislosti

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,m_0}{c\,\pi\,\rho_v}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r_{m1}^3}r\right]} = (30{,}4\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})\sqrt{\frac{1}{r^2}+\ (1{,}71\cdot10^{-3}\ \text{m}^{-3})\ r}$$

Z grafu vidno, že minimum rýchlosti zodpovedá vypočítanej hodnote polomeru gule.




**graf 2 body**

d) Pre určenie rýchlosti pádu použijeme vzťah (1), do ktorého dosadíme za hustotu gule hustotu vody a $m_0 = 0$

$$v = \sqrt{\frac{2gm_0}{c\pi\rho_v}\frac{1}{r^2} + \frac{8g}{3c}\left(\frac{\rho_g}{\rho_v} - 1\right)r} = \sqrt{\frac{8gd}{6c}\left(\frac{\rho_g}{\rho_v} - 1\right)} \approx 11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

V prípade pádu bez odporu vzduchu by kvapka nadobudla rýchlosť

$$v = \sqrt{2gh} \approx 140\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **2 body**

e) Ide o pád guľôčky vody pri účinku odporu prostredia. Čas zmiznutia hmly je $t_H = H/v$, kde rýchlosť určíme podľa predchádzajúceho vzťahu z časti d)

$$t_H = H\sqrt{\frac{6c}{8gd_H}\frac{\rho_v}{\rho_g - \rho_v}} \approx 3{,}21\cdot 10^3\ \mathrm{s} \approx 53{,}6\ \mathrm{min}.$$ **1 bod**

## *5. Levitácia* 

*Ivo Čáp*

Pri prúdení vody dochádza k zmene hybnosti, čo vyvoláva silu reakcie

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$ **1 bod**

Ak je tok v prívodnej hadici vo vodorovnom smere a dochádza k zmene smeru toku na zvislý, je zmena zvislej zložky hybnosti $\Delta p = m\,v$, kde $m = \rho\, Q_V\, \Delta t$ je hmotnosť vody, ktorá vyteká z dýzy za čas $\Delta t$ a $v$ je rýchlosť výtoku vody z dýz . Pri $n$ dýzach je výsledná reaktívna sila

$$F = n\frac{mv}{\Delta t} = n\rho v Q_V = n\rho\frac{Q_V^2}{S} = \frac{4n\rho Q_V^2}{\pi d^2}. \qquad (1)$$ **2 body**

Výkon čerpadla určíme zo zmeny kinetickej energie. Pre zjednodušenie predpokladajme, že straty energie v sústave sú zanedbateľne malé a že počiatočná kinetická energia vody v cisterne je nulová. Potom platí

$$P = \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2}v^2\frac{nm}{\Delta t} = \frac{n\rho Q_V^3}{2S^2} = \frac{16n\rho Q_V^3}{2\pi^2 d^4}. \qquad (2)$$ **2 body**

Pre uvedené experimentálne podmienky je $F \approx 566$ N, $P \approx 4{,}0$ kW. Pri hmotnosti rámu s osobou $m = 100$ kg je potrebné prekonať tiažovú silu $F_g = m\,g \approx 980$ N. Zariadenie s použitými parametrami na levitáciu (vznášanie) nestačí. **2 body**

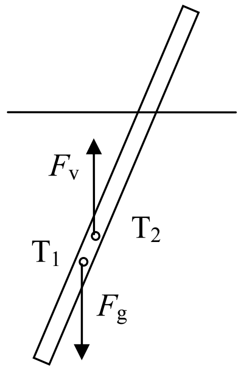
Keďže vyvolaná reaktívna sila je približne polovica potrebnej hodnoty $F_g$, je levitácia v daných podmienkach realizovateľná, len treba mierne zmeniť parametre. Prietok v dýzach musí byť aspoň

$$Q_V = \sqrt{\frac{\pi d^2 F_g}{4n\rho}} \approx 13\ \text{litrov/s}.$$

Pri tomto prietoku je požadovaný výkon čerpadla podľa vzťahu (2) $P \approx 9{,}1$ kW.
Levitácia by sa podarila, keby sa pri danej sústave použilo čerpadlo s približne dvojnásobným výkonom. **3 body**

**6. *Ponorenie telesa nárazom*** *Ivo Čáp*

a) Na obrázku je znázornená príslušná situácia. $T_1$ je ťažisko valca, v ktorom pôsobí tiažová sila $F_g$ smerom nadol. $T_2$ je ťažisko ponorenej časti valca (v polovici ponorenej časti), v ktorom je pôsobisko vztlakovej sily $F_v$. Obidve sily s rovnakou veľkosťou vytvárajú otáčavý moment sily. Ak je $T_1$ nižšie ako $T_2$ (obrázok), pôsobí moment sily proti výchylke valca a zvislú polohu stabilizuje. Keby bol bod $T_1$ vyššie ako bod $T_2$, pôsobil by silový moment opačným smerom a valec by sa v zvislej polohe neudržal. **1 bod**




Keďže sa ťažisko $T_2$ nachádza vo výške $y_2 = (1/2)\, L\, (1-\eta_1)$ nad dolným okrajom valca, musí byť výška $y_1$ ťažiska $T_1$ valca menšia $y_1 < (1/2)\, L\, (1-\eta_1)$.

V prípade homogénneho valca je $y_1 = L/2$, a teda podmienka stability nie je splnená (homogénny valec nemôže plávať v zvislej polohe). **1 bod**

*Pozn.: Valec plávajúci v zvislej polohe je možné realizovať napr. skúmavkou, do ktorej sa nasype vrstva piesku, čím sa ťažisko výrazne zníži.*

b) Pri páde z výšky $h_1$ získa guľôčka rýchlosť $v_0 = \sqrt{2 g h_1} \approx 3{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. (Vyplýva napr. zo zákona zachovania mechanickej energie $(1/2)\, m\, v_0^2 = m\, g\, h_1$). **1 bod**

Pri dokonale pružnej zrážke sa okrem hybnosti zachováva aj kinetická energia

$$m\, v_0 = -\, m\, v_1 + M\, w_1$$

$$(1/2)\, m\, v_0^2 = (1/2)\, m\, v_1^2 + (1/2)\, M\, w_1^2,$$ **1 bod**

kde $v_1$ je rýchlosť guľôčky po odraze smerom nahor, $w_1$ je rýchlosť, ktorú získa valec nárazom smerom nadol, $m = (4/3)\, \pi\, (d/2)^3\, \rho \approx 4{,}1$ g je hmotnosť guľôčky ($\rho = 7{,}8{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota ocele). Z Archimedovho zákona, podľa ktorého je hmotnosť valca $M$ rovná hmotnosti vody vytlačenej ponorenou časťou valca, určíme $M = \pi\, (D/2)^2\, L\, (1-\eta_1)\, \rho_0 \approx 71$ g.

Rýchlosti po odraze sú

$$v_1 = v_0\, \frac{M - m}{M + m} \approx 3{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

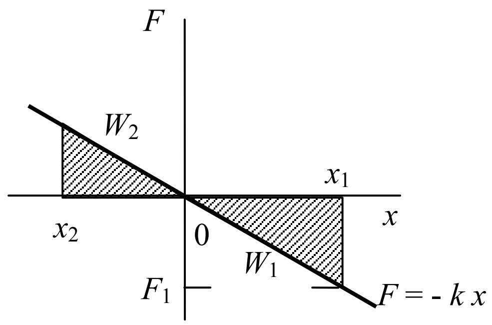
$$w_1 = v_0\, \frac{2m}{M + m} \approx 0{,}40\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Valec získa nárazom kinetickú energiu $E_{k1} = (1/2)\, M\, w_1^2$. Tá sa využije na prácu pri ponáraní valca. Ak sa valec neponorí celý pod hladinu, ide o prácu na prekonanie rozdielu tiažovej a vztlakovej sily

$$F_g - F_v = S(1-\eta_1)\, L\, \rho_0\, g - S(x + (1-\eta_1)\, L)\, \rho_0\, g = -\, S\, \rho_0\, g\, x = -\, k\, x,$$

kde $x$ je ponorenie z rovnovážnej polohy. Pri ponáraní pôsobí sila smerom nahor a brzdí pohyb pri ponáraní, pri vynáraní nad rovnovážnu polohu pôsobí smerom nadol a brzdí pohyb pri vynáraní.

*Pozn.: Pri úplnom ponorení už ďalej sila s hĺbkou nerastie a zostáva konštantná.*




Prácu určíme ako obsah plochy obmedzenej grafom sily a osou $x$

$$W = \frac{1}{2} F x = \frac{1}{2} S \rho_0 g x^2 = \frac{1}{8} \pi D^2 \rho_0 g x^2 .$$

Počiatočnú rýchlosť $w_{10}$ valca pre ponorenie práve na úroveň hladiny dostaneme z rovnosti práce $W_1$ a kinetickej energie $E_{k10}$ Pri ponorení $x \le \eta_1 L$ sa vykoná práca $W_1$ na úkor kinetickej energie $E_{k1}$

$$W_1 = \frac{1}{8} \pi D^2 \rho_0 g x^2 = \frac{1}{2} M w_1^2 . \qquad (1)$$

Pre ponorenie práve na úroveň hladiny $x_1 = \eta_1 L$ je potrebná počiatočná rýchlosť valca $w_{10}$

$$w_{10} = \eta_1 \sqrt{\frac{L g}{1-\eta_1}} \approx 0{,}16 \text{ m·s}^{-1}.$$

Nárazom guľôčky za uvedených podmienok $w_1 > w_{10}$ sa valec celkom ponorí. **2 body**

c) Po odraze má guľôčka rýchlosť $v_1$ a vystúpi tak do výšky

$$h_3 = \frac{v_1^2}{2g} \approx 56 \text{ cm},$$ čo predstavuje 79 % pôvodnej výšky $h_1$. **1 bod**

d) Pri ponáraní pôsobia na valec rovnaké sily ako pri vynáraní. Podľa zákona zachovania mechanickej energie má valec pri opätovnom vynorení o $x_1$ rýchlosť $w_1$ a teda kinetickú energiu $E_{k1}$. Pri ďalšom vynáraní až do zastavenia v maximálnej výške sa vykoná práca $W_2$ (obrázok) rovná kinetickej energii $E_{k1}$. Pre ďalšie vynorenie $x_2$ dostaneme rovnice (1)

$$\eta_2 = \frac{x_2}{L} = w_1 \sqrt{\frac{1-\eta_1}{g L}} \approx 24 \ \%$$

Celkové maximálne vynorenie valca je $\eta_m = \eta_1 + \eta_2 \approx 34$ %. **1 bod**

e) Pre ponorenie práve na úroveň hladiny musí získať valec nárazom rýchlosť $w_{10}$. Rýchlosť dopadu guľôčky je $v_{02} = \sqrt{2 g h_2} = w_{10} \dfrac{M+m}{2m}$,

odkiaľ dostaneme $h_2 = \dfrac{w_{10}^2}{2g}\left(\dfrac{M+m}{2m}\right)^2 \approx 11$ cm. **2 body**

**49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy 1. kola kategórie D***
Autori úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Mucha, Ľubomír Konrád,
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp