49. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2007/08

Riešenie úloh krajského kola kategórie D

1. Autá na križovatke *Ivo Čáp*

a) Čas potrebný pre Felíciu (FE) na dosiahnutie križovatky je $t_{B1} = d_B/v_B$. Za tento čas sa dostane Fábia (FA) do vzdialenosti od križovatky $x_{A1} = d_A - v_A\, t_{B1}$

$$x_{A1} = d_A - d_B\, v_A / v_B \approx 12 \text{ m.}$$

Keď vchádza Felícia do križovatky, je Fábia vo vzdialenosti 12 m pred križovatkou a nebezpečenstvo zrážky je bezprostredné. **2 body**

b) FE urazí vzdialenosť $d_B - d_{B1}$ rýchlosťou v_B za čas $t_{B21} = (d_B - d_{B1})/v_B \approx 8{,}6$ s. Na dráhe d_{B1} sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom a križovatku dosiahne za čas t_{B22}, pre ktorý platí

$$d_{B1} = v_B\, t_{B22} + (1/2)\, a_B\, t_{B22}^2,$$

odkiaľ dostaneme (*pozn.: $a_B < 0$*)

$$t_{B22} = -\frac{v_B}{a_B} - \sqrt{\left(\frac{v_B}{a_B}\right)^2 + \frac{2 d_{B1}}{a_B}} \approx 3{,}70 \text{ s.}$$

Súradnica FA v okamihu, keď FE dosiahne križovatku je

$$x_{A2} = d_A - v_A\,(t_{B21} + t_{B22}) \approx -8{,}5 \text{ m.}$$

Keď vchádza Felícia do križovatky, je Fábia už vo vzdialenosti 8,5 m za križovatkou. K zrážke nedôjde, vozidlá sa tesne minú, ale situácia je pomerne kritická. **3 body**

c) Uvažujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade, len čas zrýchleného pohybu je

$$t_{B32} = -\frac{v_B}{a_{B2}} + \sqrt{\left(\frac{v_B}{a_{B2}}\right)^2 + \frac{2 d_{B1}}{a_{B2}}} \approx 2{,}63 \text{ s.}$$

Súradnica FA v okamihu, keď FE dosiahne križovatku je

$$x_{A2} = d_A - v_A\,(t_{B21} + t_{B32}) \approx 18{,}2 \text{ m.}$$

Keď vchádza Felícia do križovatky, je Fábia vo vzdialenosti 18 m pred križovatkou a nebezpečenstvo zrážky je bezprostredné podobne ako v situácii podľa a). **3 body**

d) Situáciu riešime podobne ako v prípade b), len vzájomne vymeníme FE za FA. Keď vchádza FA do križovatky, je súradnica FE voči križovatke

$$x_{B3} = d_B - v_B\,(t_{A31} + t_{A32}),$$

kde $t_{A31} = \dfrac{d_A - d_{A2}}{v_A}$ a $t_{A32} = -\dfrac{v_A}{a_A} - \sqrt{\left(\dfrac{v_A}{a_A}\right)^2 + \dfrac{2 d_{A2}}{a_A}}$

Po dosadení $x_{B3} \approx -16{,}1$ m.

Keď vchádza Fábia do križovatky, Felícia už je za križovatkou vo vzdialenosti 16 m. Vozidlá sa tesne minú. **2 body**

Vo všetkých prípadoch je situácia veľmi nebezpečná.

2. *Striekanie vody* *Ivo Čáp*

a) Rýchlosť prúdu v ústí striekačky určíme pomocou zákona zachovania mechanickej energie z maximálnej výšky dostreknutia

$$v_0 = \sqrt{2gH} \approx 12{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$ **3 body**

b) Tlakový rozdiel určíme z Bernoulliho rovnice pre bod v hadici a bod v ústí dýzy

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_\mathrm{a}.$$

v_1 je rýchlosť toku v hadici, p je tlak vo vnútri hadice, p_a je vonkajší atmosférický tlak a teda aj tlak v ústí dýzy.
Z rovnice kontinuity toku dostaneme $v_1 = v_0\, S_0/S_1 = v_0\,(r/R)^2$.
Tlakový rozdiel je

$$\Delta p = p - p_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\rho\, v_0^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right) = \rho g H\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right) \approx 73{,}1\ \mathrm{kPa}$$ **4 body**

c) Objemový prietok v hadici je $Q_V = S_0\, v_0$. Celkový objem vody za daný čas je

$$V = Q_V\, t = \pi r^2\, v_0\, t \approx 2{,}5\ \mathrm{m^3}.$$ **3 body**

3. *Náraz* *Ľubomír Konrád*

a) Guľôčka (2) narazí do (1) rýchlosťou v_{20}, ktorú určíme pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$v_{20} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \approx 1{,}0\ \mathrm{m/s}$$ **2 body**

kde $h = l\,(1 - \cos\alpha)$ je počiatočná výška.
Pri pružnej zrážke sa zachováva kinetická energia pred a po zrážke a hybnosť sústavy

$$\frac{1}{2}m_2\, v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_2\, v_{21}^2 + \frac{1}{2}m_1\, v_{11}^2$$

$$m_2\, v_{20} = m_2\, v_{21} + m_1\, v_{11}.$$

Rovnice upravíme

$$m_2\left(v_{20}^2 - v_{21}^2\right) = m_1\, v_{11}^2$$

$$m_2\left(v_{20} - v_{21}\right) = m_1\, v_{11}$$

Z týchto rovníc určíme rýchlosť guľôčky (1) po náraze

$$v_{11} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{20} \qquad .$$

Táto rýchlosť je počiatočnou rýchlosťou vodorovného vrhu z výšky h. Čas pádu je $t_\mathrm{d} = \sqrt{2h/g}$ a vzdialenosť dopadu je

$$d_1 = v_{11}\, t_\mathrm{d} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{20}\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}36\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

b) Ak je zrážka guľôčok dokonale nepružná, je ich vzájomná rýchlosť po zrážke nulová (neodrazia sa od seba). Zo zákona zachovania hybnosti dostaneme výslednú rýchlosť v_{12}

$$m_2\, v_{20} = (m_1+m_2)\, v_{12} \quad \text{a teda} \quad v_{12} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_{20}.$$

Zodpovedajúca vzdialenosť dopadu je

$$d_2 = v_{12}\, t_\mathrm{d} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_{20}\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}18\ \mathrm{m}.$$ **1 bod**

Úbytok mechanickej energie je

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = k_2 E_{\mathrm{k0}}$$

a relatívny úbytok mechanickej energie je

$$k_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx 56\ \%.$$ **2 body**

c) Zo vzdialenosti dopadu guľôčky určíme jej rýchlosť po zrážke

$$v_{13} = \frac{d_3}{t_{\mathrm{d}}} = d_3 \sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 0{,}59\ \mathrm{m/s}.$$ **1 bod**

Zo zákona zachovania hybnosti pri zrážke dostaneme rýchlosť guľôčky (2) po zrážke

$$m_2 v_{20} = m_2 v_{23} + m_1 v_{13},$$

odkiaľ

$$v_{23} = v_{20} - \frac{m_1}{m_2} v_{13}.$$

Úbytok mechanickej energie je

$$\Delta E_{\mathrm{k3}} = \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 - \frac{1}{2} m_2 \left(v_{20} - \frac{m_1}{m_2} v_{13} \right)^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{13}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \left[1 - \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \frac{v_{13}}{v_{20}} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \frac{m_1}{m_2} \frac{v_{13}^2}{v_{20}^2}$$

Relatívna zmena

$$k_3 = \frac{\Delta E_{\mathrm{k3}}}{E_{\mathrm{k0}}} = 1 - \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \frac{v_{13}}{v_{20}} \right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{v_{13}^2}{v_{20}^2} \right) \approx 50\ \%.$$ **2 body**

4. Rovnováha

Ľubomír Konrád

Podstava valčeka má obsah $S_1 = M / (\rho_0 H)$. Hmotnosť vody vytlačenej valčekom je $\rho h S_1$. Ak je sústava v rovnováhe, platí

$$Mg - \rho g h S_1 = mg\,,$$

odkiaľ hmotnosť použitého závažia

$$m = M - \rho h S_1 = 867 \text{ g.}$$ **4 body**

Ďalej sú možné dva prípady.

1.prípad: Ak k protizávažiu pridáme hmotnosť Δm, rovnováha sa poruší. Keďže $\Delta m > \rho h S_1$, valček sa vynorí z vody. Pred porušením rovnováhy je objem vody nachádzajúcej sa nad spodnou podstavou valčeka $(S - S_1)h$. Táto voda sa po nadvihnutí valčeka rozleje na plochu S s výškou Δl_1, t.j. $(S - S_1)h = S\Delta l_1$, odkiaľ $\Delta l_1 = h - (S_1/S)h$. Takže ak hmotnosť protizávažia zvýšime o Δm, klesne hladina vody v pohári o

$$\Delta l = h - \Delta l_1 = \frac{S_1}{S} h = \frac{Mh}{\rho_0 H S} = 1{,}1 \text{ cm.}$$ **3 body**

2.prípad: Ak hmotnosť protizávažia znížime o Δm, poklesne valček do vody, pričom sa bude pod hladinou nachádzať časť valčeka s výškou $h + \Delta h$. Ak je $h + \Delta h < H$, valček sa nebude topiť. Zrejme platí $\Delta l : \Delta h = S_1 / S$, odkiaľ prírastok výšky hladiny vody v pohári je

$$\Delta l = \frac{S_1}{S} \Delta h = \frac{\Delta m}{\rho S} = 2{,}0 \text{ cm.}$$ **3 body**

49. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori úloh:	Ivo Čáp, Ľubomír Konrád
Recenzia:	Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia:	Ivo Čáp
Finančné zabezpečenie:	Vydanie hradené z dotácie MŠ SR prostredníctvom Iuventy v Bratislave