

Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória A

Riešenie úloh domáceho kola

1. Optimálny uhol vrhu

- a) Ak človek vrhne teleso pod uhlom α vzhľadom na plošinu vozíka počiatočnou rýchlosťou v vzhľadom na vozík, získa vozík podľa zákona zachovania rýchlostí u na opačnú stranu a teleso vzhľadom na koľajnice rýchlosť, ktorej zložky sú $v_x = v \cos \alpha - u$ a $v_y = v \sin \alpha$. V sústave spojenej s koľajnicami platí

$$M u = m (v \cos \alpha - u), \text{ odkiaľ } u = \frac{m}{M+m} v \cos \alpha \quad \boxed{1 \text{ bod}}$$

Uhol vrhu v sústave koľajníc je β , pre ktorý je $\text{tg } \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - u}$. $\boxed{1 \text{ bod}}$

Zo zvislej zložky pohybu určíme čas dopadu

$$y = v t_D \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_D^2 = 0$$

$$t_D = \frac{2 v \sin \alpha}{g}$$

a pomocou neho vzdialenosť vrhu v sústave koľajníc

$$D = v_x t_D = (v \cos \alpha - u) \frac{2 v \sin \alpha}{g} = \frac{2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \frac{M}{M+m}$$

a po úprave čitateľa $D = \frac{M}{M+m} \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$. $\boxed{1 \text{ bod}}$

Maximum dosiahne vzdialenosť pre $\sin 2\alpha_1 = 1$, tzn. pre uhol vrhu $\alpha_1 = \pi/4$ rad.

Maximálna vzdialenosť doletu je $D_{\max} = \frac{M}{M+m} \frac{v^2}{g}$. $\boxed{2 \text{ body}}$

- b) Z rovníc pre súradnice šikmého vrhu

$$x = v t \cos \alpha \quad \text{a} \quad y = v t \sin \alpha - (1/2) g t^2$$

dostaneme po vylúčení času $y = x \text{tg } \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2$. $\boxed{2 \text{ body}}$

Pre súradnice dopadu na šikmú plochu platí $y = x \text{tg } \varphi$.

Po dosadení $x \text{tg } \varphi = x \text{tg } \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2$,

odkiaľ dostaneme pre $x \neq 0$: $x = \frac{2v^2}{g} (\text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi) \cos^2 \alpha$.

Maximálna vzdialenosť zodpovedá aj maximálnej hodnote súradnici x miesta dopadu a teda maximum funkcie $f(\alpha) = (\text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi) \cos^2 \alpha$. Túto funkciu možno postupne upraviť

$$f(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha - \text{tg } \varphi \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \text{tg } \varphi \cos 2\alpha) - \frac{1}{2} \text{tg } \varphi.$$

S použitím pomôcky v zadaní výraz upravíme na tvar

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} \sin(2\alpha - \varphi) - \frac{1}{2} \text{tg } \varphi.$$

Tento výraz dosahuje maximálnu hodnotu pre $\sin(2\alpha_2 - \varphi) = 1$ a teda pre uhol vrhu

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad \boxed{2 \text{ body}}$$

čo predstavuje os uhla medzi naklonenou rovinou a zvislým smerom. $\boxed{1 \text{ bod}}$

2. Valec na páse

- a) V sústave podložky je pohyb valivý, čo predstavuje postupný pohyb s rýchlosťou v_0 a s uhlovou rýchlosťou $\omega_0 = v_0/R$.

Pri prechode na pás s rovnakým smerom pohybu sa postupne rýchlosť ťažiska valca zvýši na hodnotu v_1 účinkom sily šmykového trenia F_t , ktorá pôsobí na valec v smere pohybu valca, a uhlová rýchlosť sa účinkom momentu tejto sily $-R F_t$ zníži na hodnotu $\omega_1 = (v_1 - u) / R$ valivého pohybu bez preklzavania.

Počas šmýkania je veľkosť sily trenia $F_t = f M g$. Pre rýchlosť postupného pohybu v sústave stola a uhlovú rýchlosť otáčania platí počas šmýkania

$$v = v_0 + f g t \quad \omega = \omega_0 - (f M g R / I) t,$$

2 body

kde $I = M R^2$ je moment zotrvačnosti tenkostenného valca.

Šmýkanie trvá až kým valec nedosiahne podmienku valivého pohybu vzhľadom na pás

$$v_1 - u = R \omega_1.$$

Po dosadení dostaneme

$$v_0 + f g t_0 - u = R \omega_1 = R [v_0/R - (f g / R) t_0] = v_0 - f g t_0.$$

2 body

Odtiaľ dostaneme čas šmýkania $t_0 = \frac{u}{2 g f}$.

- b) Rýchlosť postupného pohybu vzhľadom na pás a uhlovú rýchlosť valivého pohybu dostaneme po dosadení času šmýkania

$$v_1 - u = v_0 + f g t_0 - u = v_0 - \frac{u}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R} \left(v_0 - \frac{u}{2} \right).$$

2 body

Vzhľadom na podložku sa uhlová rýchlosť nemení, ale postupná rýchlosť

$$v_1 = v_0 + \frac{u}{2}.$$

- c) Zmenu kinetickej energie valca určíme v sústave podložky. Zmena je rovná súčtu zmeny kinetickej energie postupného pohybu a kinetickej energie rotačného pohybu

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M (v_1^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2).$$

Po dosadení a úprave dostaneme $\Delta E_k = \frac{1}{4} M u^2$.

2 body

Motor, ktorý poháňa pás koná prácu, ktorá zabezpečí jeho rovnomerný chod. Práca sa premení na zvýšenie kinetickej energie a na teplo, ktoré sa uvoľní v dôsledku šmykového trenia valca na páse.

Prácu sily trenia určíme v sústave pásu ako súčin sily a dráhy pásu za čas t_0

$$W = F_t s = F_t u t_0 = \frac{1}{2} M u^2.$$

Rozdiel vykonanej práce a zvýšenia kinetickej energie predstavuje uvoľnené teplo

$$Q = W - \Delta E_k = \frac{1}{4} M u^2.$$

2 body

3. Neutrónová hviezda

- a) V tabuľkách možno zistiť hodnotu konštanty $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ m. Podľa uvedeného modelu je jadro homogénna guľa. Ak uvážime hmotnosť nukleónu $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, je hustota jadra

$$\rho_j = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R_0^3} \approx 1,82 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

1 bod

Polomer neutrónovej hviezdy s hmotnosťou Slnka $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg je

$$R_N = \sqrt[3]{\frac{3M_S}{4\pi\rho_j}} \approx 1,38 \cdot 10^4 \text{ m.}$$

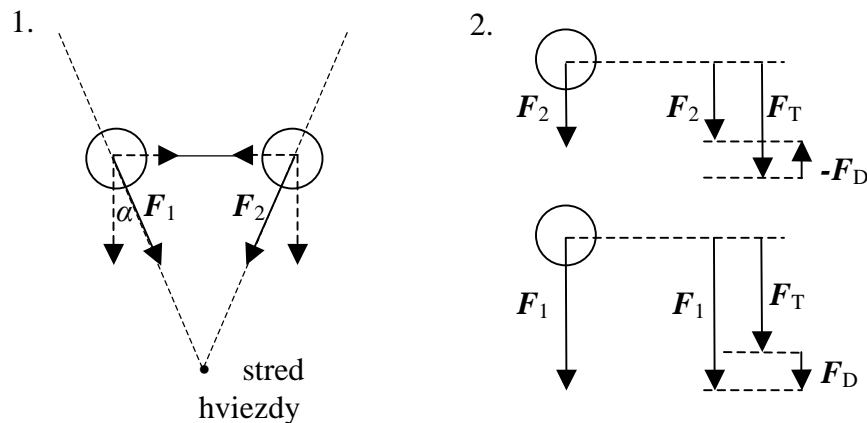
1 bod

Keby sa Slnko premenilo na neutrónovú hviezdu, malo by polomer približne 14 km.

- b) Pri povrchu neutrónovej hviezdy je intenzita gravitačného poľa (gravitačné zrýchlenie)

$$E_g = G \frac{M_S}{R_N^2} \approx 7,01 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 7,14 \cdot 10^{10} \times g.$$

1 bod



Gravitačná sila závisí od vzdialenosti od stredu (resp. od povrchu) telesa a má radiálny smer.

Uvažujme uvedené dvoj-teleso.

1. Ak sa obidve telesá nachádzajú v rovnakej výške (spojka je vodorovná), teleso je ťahané v ťažisku v smere k stredu hviezdy. V tyči pôsobí dvojica síl, ktorá teleso stláča, ako je zrejme z obrázku 1. V blízkosti povrchu hviezdy je veľkosť tlakovej sily pri povrchu hviezdy $F_{tlak} = F_1 (d/2) / R_N$

$$F_{tlak} = F_1 \sin \alpha = mE_g \sin \alpha = mE_g \frac{d}{2R_N} \approx 1,52 \cdot 10^9 \text{ N}$$

2 body

Táto poloha je však nestabilná, pri malej výchylke vzniká dvojica síl, ktorá natáča dvojicu do „zvislého“ smeru.

2. Radiálna („zvislá“) poloha je stabilná vzhľadom na uhlové vychýlenie. Z obrázku vidno, že sily F_1 a F_2 možno rozložiť na dvojicu rovnako veľkých súhlasných síl $F_T = (1/2) (F_1 + F_2)$, ktorá udeľuje telesu výsledné zrýchlenie $a = 2 F_T / (2m)$, a dvojicu rovnako veľkých ale opačne orientovaných síl $\pm F_D = \pm(1/2) (F_1 - F_2)$, ktoré majú nulovú výslednicu a preto neovplyvňujú postupný pohyb telesa. Táto dvojica však vyvoláva ťahovú deformáciu.

Ak teleso voľne padá k povrchu hviezdy a nachádza sa v blízkosti povrchu, pôsobí na spojku ťahová sila

$$F_D = \frac{F_1 - F_2}{2} = \frac{GM_S m}{2} \left[\frac{1}{(R - d/2)^2} - \frac{1}{(R + d/2)^2} \right] = \frac{GM_S m}{(R^2 - d^2/4)^2} R d$$

Pre $R \approx R_N$

$$F_D \approx m E_g \frac{d}{R_N} = 3,05 \cdot 10^9 \text{ N}$$

2 body

Vertikálna ťahová sila je dvojnásobná v porovnaní s horizontálnou tlakovou silou.

Z výsledku vidno, že ide o sily, ktorým nemôže žiadne teleso odolať.

- c) Pri kolapse hviezdy sa zachováva moment hybnosti telesa. Ak uvažujeme zachovanie guľového tvaru a homogenitu gule, je moment zotrvačnosti vzhľadom na os $I = (2/5) M_S R^2$. Perióda rotácie Slnka okolo jeho osi je $T_S \approx 25,4$ dňa (ide o priemernú rýchlosť, iná je perióda pre rovníkovú oblasť, iná pre oblasti bližšie k pólom), bližšie napr. <http://sk.wikipedia.org/wiki/Slnko>.

Čas otočenia neutrónovej hviezdy s nezmenenou hmotnosťou a tvarom homogénnej gule je (polomer Slnka $R_S = 6,96 \cdot 10^8$ m)

$$T_N = \frac{R_N^2}{R_S^2} T_S \approx 0,86 \text{ ms.}$$

1 bod

Z výsledku vidno, že neutrónové hviezdy sa môžu otáčať s periódami rovnými rádovo milisekundám, čo je aj potvrdené astronomickými pozorovaniami.

- d) Gravitačné pole pôsobí nielen na masívne telesá ale aj na elektromagnetické žiarenie, reprezentované fotónmi. Podľa kvantovej teórie súvisí energia fotónu s vlnovou dĺžkou EM vlnenia, ktoré predstavuje $E_f = hf = hc / \lambda$, kde h je Planckova konštanta. Podľa Einsteinovej teórie relativity je energia ekvivalentná hmotnosti podľa vzťahu $E_f = m_f c^2$.

Hmotnosť fotónu je $m_f = \frac{h}{c \lambda}$.

Fotóny vyžiarené z povrchu hviezdy prekonávajú gravitačné pole, v ktorom strácajú časť svojej žiarivej energie na úkor potenciálnej energie. V tejto súvislosti energia E_f vystupuje ako kinetická energia mechanického telesa. Pokles energie E_f sa prejaví zväčšením zodpovedajúcej vlnovej dĺžky

$$\frac{hc}{\lambda_0} - G \frac{M_S m_{f0}}{R_N} = \frac{hc}{\lambda} - 0.$$

Nulovou hodnotou je naznačená nulová potenciálna energia vo veľkej vzdialenosti (Zem). Po dosadení za hmotnosť fotónu a po úprave dostaneme

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1}{1 - \frac{G M_S}{c^2 R_N}} - 1 = \frac{1}{\frac{E_g R_N}{c^2} - 1} \approx 12 \%$$

2 body

Vidíme, že v optickej oblasti ide o posunutie smerom k červenému okraju spektra, preto sa nazýva „gravitačný červený posun spektra žiarenia“.

4. Elektrický frekvenčný filter

- a) Pri konštantných hodnotách odporov R_a a R_z je na výstupe minimálne napätie pri minimálnej hodnote impedancie filtra $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Minimálna hodnota sa dosiahne pri uhlovej frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ pre ktorú } \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0.$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

1 bod

Impedancia filtra je pri tejto frekvencii rovná odporu R ($Z = R$), ktorý sa nachádza paralelne k záťaži. Napätie na záťaži má potom minimálnu hodnotu

$$U_{z \min} = U_a \frac{\frac{R R_z}{R + R_z}}{R_a + \frac{R R_z}{R + R_z}} = U_a \frac{R R_z}{R_a (R + R_z) + R R_z}.$$

1 bod

- b) Maximálna hodnota napätia na záťaži sa dosiahne, ak impedancia filtra nadobudne maximálnu hodnotu. Zo vzťahu pre impedanciu vidno, že impedancia rastie k nekonečnu pre $\omega \rightarrow 0$ a $\omega \rightarrow \infty$. V takom prípade dosahuje výstupné napätie maximálnu hodnotu

$$U_{z \max} = U_a \frac{R_z}{R_a + R_z}$$

Pomer potlačenia nežiaduceho signálu je potom $p = \frac{R(R_a + R_z)}{R_a(R + R_z) + R R_z}$

1 bod

- c) Admitancia filtra je daná vzťahom $\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$,

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginárna jednotka.

Veľkosť admitancie je $Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

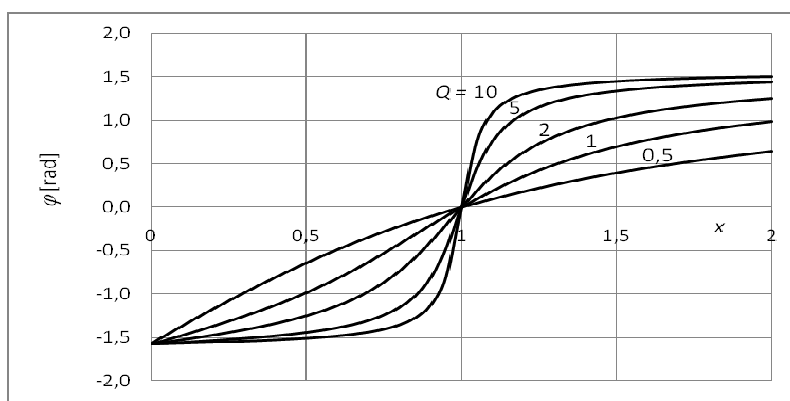
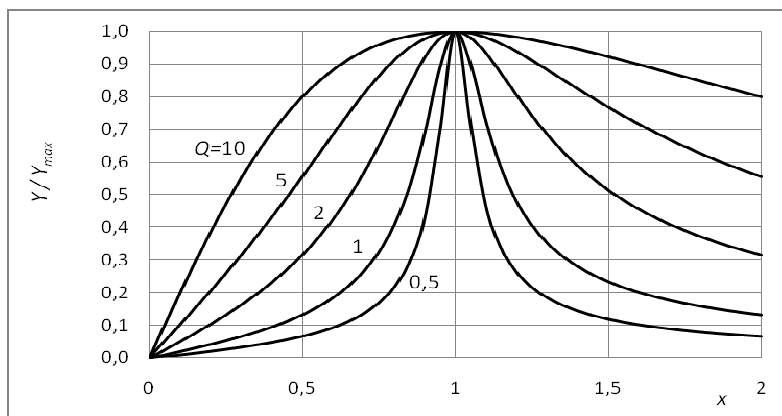
1 bod

fázový rozdiel napätia a prúdu $\varphi = \text{arctg} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$.

1 bod

- d) Ak uvážime uvedené definičné vzťahy a $Y_{\max} = 1/R$, upravíme predchádzajúce vzťahy na tvar

$$\frac{Y}{Y_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \text{a} \quad \varphi = \text{arctg} \left[Q \left(x - \frac{1}{x}\right) \right].$$



2 body

Z obrázkov vidno, že výrazné zmeny sa prejavujú v intervale okolo $x = 1$, ktorý sa zužuje pri narastaní činiteľa kvality Q .

- e) Pre medzné uhlové frekvencie, pre ktoré poklesne relatívna admitancia na hodnotu 71 %

platí vzťah $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2$,

odkiaľ dostaneme $x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$.

Ide o kvadratickú rovnicu a jej riešenie

$$x^2 \pm \frac{1}{Q} x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 + 1} \quad x_{1,2} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q} \text{ pre } Q \gg 1$$

Rozdiel hraničných relatívnych frekvencií a potom frekvencií je

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \quad \text{a} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

1 body

Pre dané hodnoty f_0 , Δf a p dostaneme

$$R = \frac{p R_a R_z}{(R_a + R_z)(1-p)} \approx 0,025 \Omega$$

$$L = R \frac{Q}{2\pi f_0} = \frac{R}{2\pi \Delta f} \approx 20 \text{ nH}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} \approx 12 \text{ nF}$$

2 body

5. Žiarovka s volfrámovým vláknom

- a) Zo zadaných prevádzkových hodnôt $P = 60 \text{ W}$ a napätie $U = 230 \text{ V}$ dostaneme prúd

$$I_p = \frac{P}{U} \approx 0,26 \text{ A.}$$

1 bod

Prúd je nepriamo úmerný odporu žiarovky, ktorý závisí od teploty

$$R_p = R_0 [1 + \alpha (t_p - t_0)]$$

$$I_0 = I_p [1 + \alpha (t_p - t_0)] \approx 4,27 \text{ A.}$$

1 bod

- b) Pri prevádzkových podmienkach sa príkon vlákna rovná výkonu vyžiarenému jeho povrchom, odkiaľ

$$P = \sigma (T^4 - T_0^4) (\pi d l).$$

Odpor vlákna pri teplote t_0 je

$$R_0 = \rho_{20} \frac{l}{S} = \rho_{20} \frac{4l}{\pi d^2} = \frac{U}{I_0} \approx 54 \Omega.$$

Odtiaľ dostaneme

$$d = \sqrt[3]{\frac{4\rho_{20} P I_0}{\pi^2 \sigma (T^4 - T_0^4) U}} \approx 1,92 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$

2 body

$$l = \frac{\pi d^2 U}{4\rho_{20} I_0} \approx 30 \text{ cm.}$$

1 bod

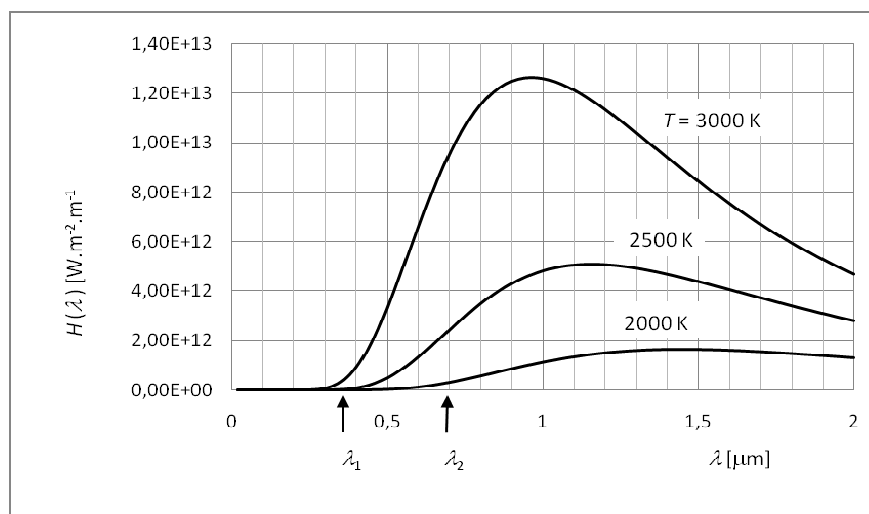
- c) Planckov zákon vyjadruje závislosť spektrálnej hustoty intenzity vyžarovania čierneho telesa od vlnovej dĺžky žiarenia

(napr.: http://en.wikipedia.org/wiki/Planck's_law_of_black_body_radiation)

$$H(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1},$$

$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ (Planckova konštanta), $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ (Boltzmannova konštanta), $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (rýchlosť svetla vo vákuu), T termodynamická teplota, λ vlnová dĺžka.

Veličina $H(\lambda)$ je výkon vyžiarený z jednotkovej plochy povrchu telesa s teplotou T v elementárnom intervale vlnových dĺžok (λ , $\lambda + d\lambda$) delený týmto intervalom $d\lambda$ (spektrálna hustota podľa vlnovej dĺžky).



Podmienka rovnakej spektrálnej hustoty pre hraničné vlnové dĺžky je

$$\frac{1}{\lambda_1^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda_1 kT) - 1} = \frac{1}{\lambda_2^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda_2 kT) - 1}$$

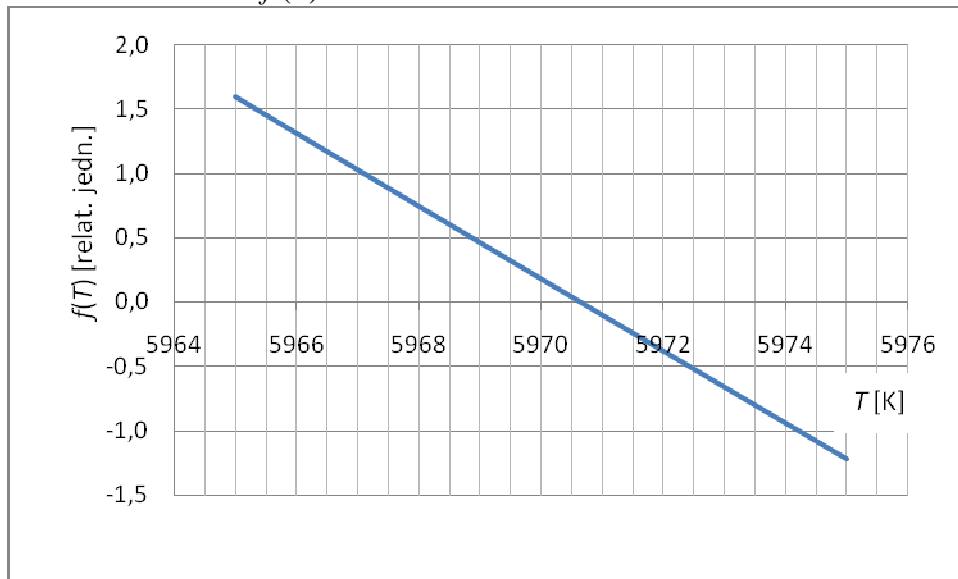
Z tejto rovnice vyjadríme hľadanú teplotu. Keďže ide o veľmi zložitú rovnicu, použijeme numerickú metódu riešenia. Rovnicu napr. upravíme na tvar

$$\exp(hc/\lambda_1 kT) - 1 = \frac{\lambda_2^5}{\lambda_1^5} [\exp(hc/\lambda_2 kT) - 1]$$

Definujeme funkciu

$$f(T) = \lambda_2^5 [\exp(hc/\lambda_2 kT) - 1] - \lambda_1^5 [\exp(hc/\lambda_1 kT) - 1],$$

pre ktorú hľadáme riešenie $f(T) = 0$.



Ak vložíme uvedenú funkciu do tabuľkového procesora EXCEL a necháme nakresliť graf, možno ľahko meniť rozsah zobrazených teplôt. Po postupnom zjemňovaní môžeme identifikovať nulový bod s ľubovoľnou presnosťou. V grafe je znázornená závislosť funkcie $f(T)$ v rozsahu 10 K. S dostatočnou presnosťou určíme hľadanú teplotu $T_1 \approx 5971$ K, čo zodpovedá približne teplote povrchu Slnka, nášho základného svetelného zdroja.

2 body

- d) Pri danej teplote je pomer spektrálnych hustôt

$$p = \frac{H(\lambda_1)}{H(\lambda_2)} = \frac{\lambda_2^5}{\lambda_1^5} \frac{\exp(hc/\lambda_2 kT) - 1}{\exp(hc/\lambda_1 kT) - 1},$$

pre dané hodnoty a teplotu T_p je $p \approx 51$.

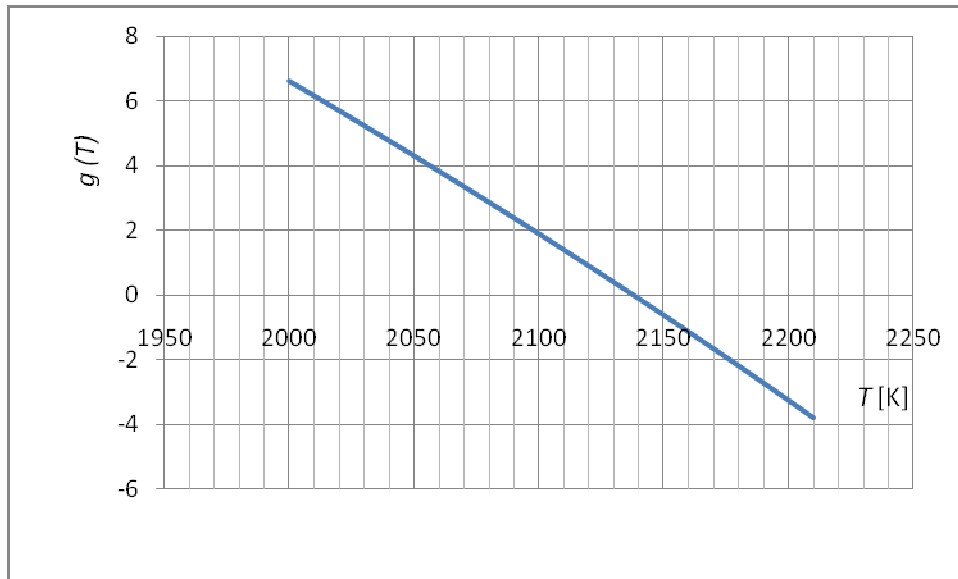
1 bod

Z výsledku je zrejmé, že pre $T < T_1$ prevládajú v spektre žiarenia vlnové dĺžky väčšie, preto sa teleso zafarbuje do červena.

Pri znížení napätia zdroja poklesne teplota vlákna. Teplotu dostaneme z rovnováhy elektrického príkonu žiarovky a výkonu žiarenia vyžarovaného z povrchu vlákna

$$\frac{U^2}{R_0 [1 + \alpha_R (T - T_0)]} = \sigma (T^4 - T_0^4) \pi d l$$

Riešenie získame opäť numericky alebo graficky. Na obrázku je graf funkcie $g(T)$, ktorá predstavuje rozdiel ľavej a pravej strany.



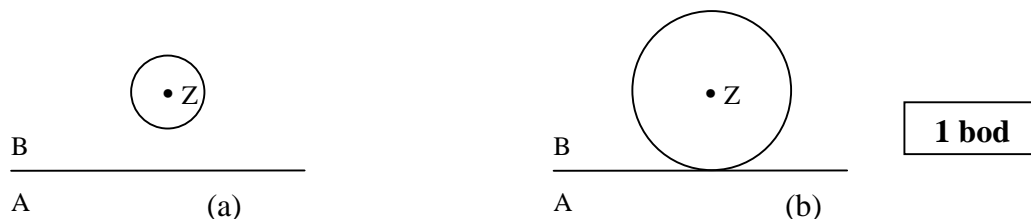
Z grafu dostaneme riešenie – pri napätí 120 V má vlákno teplotu $T_2 \approx 2140$ K. Pomer spektrálnych hustôt žiarenia pri tejto teplote je $p_2 \approx 451$. Pomer sa mení v prospech červenej zložky.

Vidíme, že pokles napätia a tým aj pokles teploty sa prejaví výrazným zafarbením vlákna do červena – o čom sa môžeme bežne presvedčiť.

2 body

6. Vlnoplochy na rozhraní dvoch prostredí

- a) Vzďialenosť prekonaná vlnením za čas t_1 v prostredí B je $R_1 = v_B t_1 = 30$ m. Vlnenie nedosiahne rozhranie.



- b) Vzďialenosť je $R_2 = v_B t_2 = 60$ m. Vlnenie dorazí k rozhraniu obidvoch prostredí. **1 bod**
 c) Signál sa čiastočne odrazí nazad do prostredia B a čiastočne prejde do prostredia A. Rôzne lúče dopadajú na rozhranie pod rôznymi uhlami. Určíme lúč, ktorý dopadne na rozhranie pod medzným uhlom, pre ktorý platí

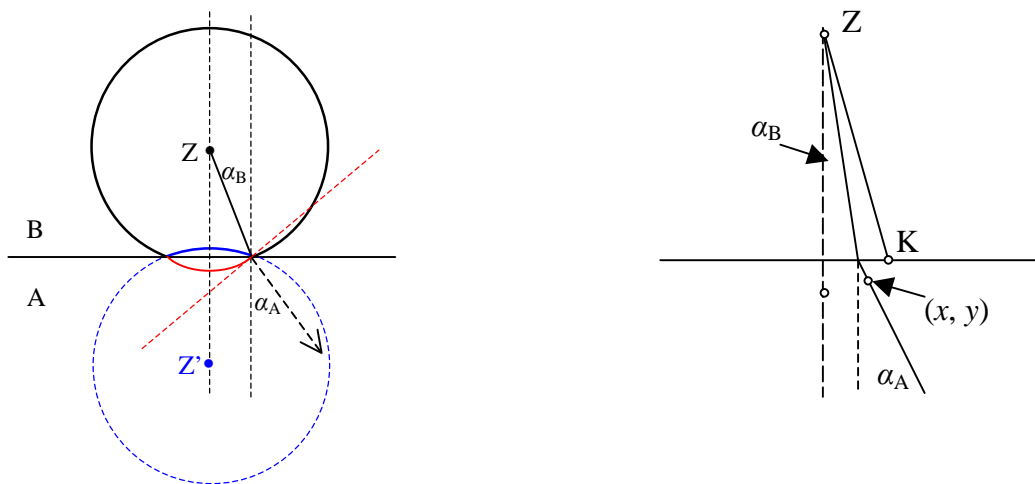
$$\sin \alpha_{A0} = \frac{v_A}{v_B} \sin \alpha_{B0} = 1,$$

odkiaľ $\sin \alpha_{B0} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{B0} = 30^\circ.$ **1 bod**

V čase t_3 je polomer vlnoplochy $R_3 = v_B t_3 = 63$ m. Tomuto polomeru zodpovedá uhol

dopadu krajného lúča $\sin \alpha_B = \frac{\sqrt{R_3^2 - d^2}}{R_3} = 0,305 \Rightarrow \alpha_B = 17,75^\circ.$

Všetky lúče teda podliehajú riadnemu odrazu a lomu.



Krajný lúč dosiahne rozhranie za čas t_3 v bode K. Pre menší uhol dopadu $\alpha_B < \alpha_{BK}$ dopadne lúč na rozhranie za čas $t_b = l_{Bv}/v_B = d / (\cos \alpha_B v_B)$. Za zvyšný čas $t_3 - t_b$ sa vlnenie dostane do bodu so súradnicami (x, y) , kde

$$x = d \operatorname{tg} \alpha_B + (t_3 - t_b) v_A \sin \alpha_A$$

$$y = (t_3 - t_b) v_A \cos \alpha_A.$$

Krivka, ktorá zodpovedá tomuto parametrickému vyjadreniu, kde parameter je uhol α , nezodpovedá žiadnej jednoduchej krivke. Jej tvar sa určí výpočtom bod po bode, pričom s výhodou možno použiť vhodný počítačový program. (Postup: Pre zvolený uhol α_B sa určí s použitím zadaných hodnôt uhol α_A a čas t_b a vypočítajú sa súradnice x a y krivky).

Pre čas t_3 teda dostávame tri vlnoplochy vlnenia:

1. Pre uhol dopadu $\alpha_B > \alpha_{BK}$ je to oblúk kružnice so stredom Z (vlnenie ešte nedosiahlo rozhranie)

2. Odrazená vlna postupuje nazad s rovnakou rýchlosťou ako pred dopadom a vlnoplocha je znázornená oblúkom kružnice so stredom Z' zrkadlovo umiestneným voči Z

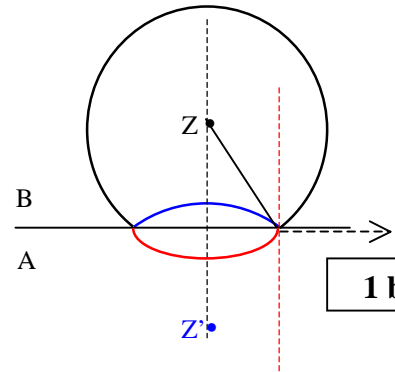
3. Prenikajúca lomená vlna s vlnoplochou znázornenou zostrojenou krivkou. V bode dotyku s rozhraním zvierá krivka s rozhraním uhol $\alpha_{AK} < \pi/2$ rad daný zákonom lomu.

Pozn.: Krivka znázorňujúca prechádzajúcu vlnu pripomína elipsu, ale nie je to elipsa.

2 body

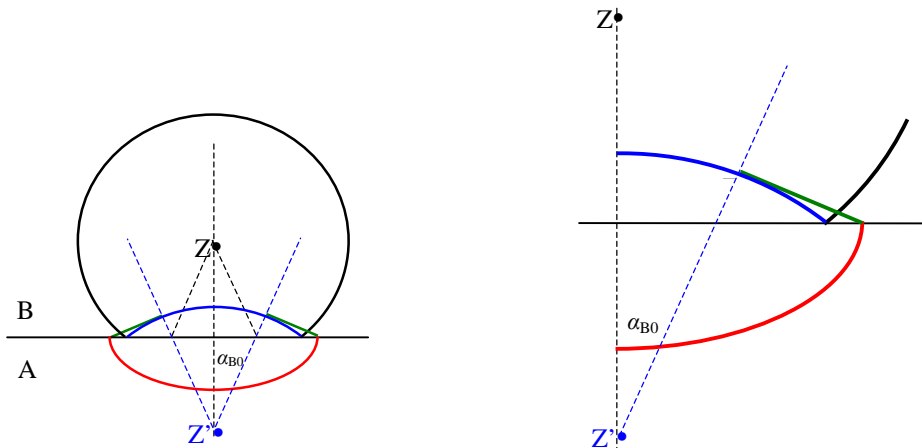
- d) V čase $t_4 = 0,231$ s je uhol dopadu krajného lúča práve $\alpha_{BK} = 30^\circ$, o čom sa môžeme presvedčiť dosadením t_4 do vzťahov v časti c). Vlnolochy sú taktiež znázornené trojicou kriviek s tým, krivka vlnoplochy prechádzajúceho lomeného vlnenia je v bode dotyku s rozhraním na rozhranie kolmá.

Pozn.: V tomto prípade dosiahol krajný lúč dopadajúci na rozhranie medzný uhol úplného odrazu, čomu zodpovedá lomený lúč rovnobežný s rozhraním.



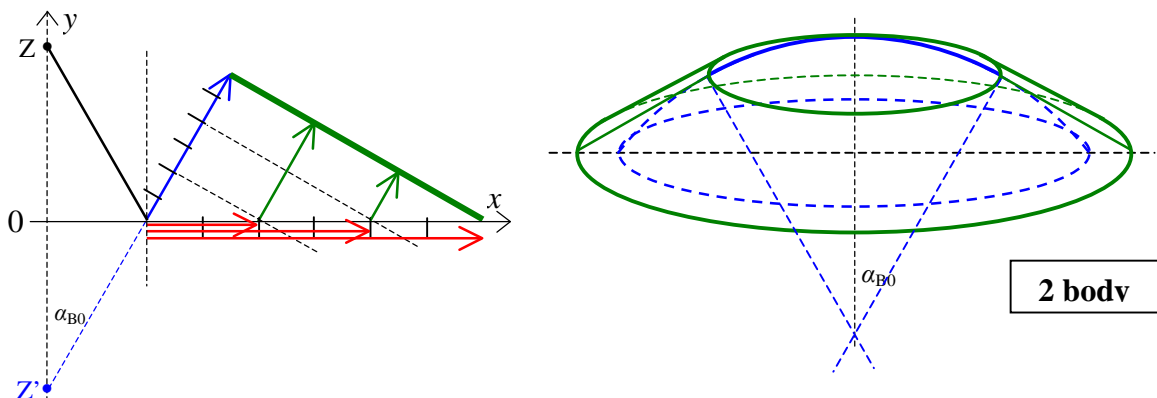
- e) V čase $t_5 = 0,4$ s je polomer vlnoplochy priamo od zdroja

$R_5 = v_B t_5 = 120$ m. Do prostredia A sa dostanú len lúče dopadajúce na rozhranie pod uhlami $\alpha_B \leq 30^\circ$. Prejdená vlna sa šíri v priestore A. Lúč, ktorý dopadol pod uhlom α_{B0} postupuje v prostredí A rovnobežne s rozhraním. Podľa zákona lomu sa však vlnenie, ktoré sa šíri pozdĺž rozhrania, môže lámať do druhého prostredia B pod uhlom α_{B0} . Tak sa časť vlnenia vracia nazad do prostredia B po prekonaní určitej vzdialenosti pozdĺž rozhrania rýchlosťou v_A .



Keďže „povrchová“ vlna postupuje pozdĺž povrchu rýchlosťou v_A , má vlna vystupujúcu nazad do prostredia B v reze tvar úsečky a v priestore tvar skoseného kužela.

Porovnaním časov prechodu signálu od zdroja do ľubovoľne zvoleného bodu polpriestoru



2 body

B, ktorý sa nachádza v oblasti, kde taký lúč už existuje (t. j. mimo kónickú oblasť s vrcholom v bode Z' s vrcholovým uhlom α_{B0}), možno dokázať, že signál od odrazenej vlny dôjde neskôr, než signál, ktorý časť dráhy prekonal v prostredí A. Okrem troch vlnoplôch (priama, odrazená, prejdená) existuje teda v prostredí B ešte ďalšia tzv. bočná vlna, ktorá má tvar plášťa zrezaného kužeľa.

Rovnica úsečky vlnoplochy bočnej vlny, ako to vyplýva z obrázku, je

$$y = -\operatorname{tg} \alpha_{B0} x + d (\operatorname{tg} \alpha_{B0})^2 + \frac{v_B}{\cos \alpha_{B0}} (t - t_4) \quad \text{pre } t > t_4.$$

Pre $t > t_4$ existuje teda oblasť v prostredí B, kam signál od zdroja príde vlny priamej, odrazenej i vlny bočnej. Pre tieto časy existuje oblasť, kam bočná vlna príde ako prvá (na zobrazení rezu vlnoplôch oblasť medzi rozhraním, priamou a bočnou vlnoplochou).

Porovnáme časy prechodu od zdroja k bodu P pre odrazenú a bočnú vlnu.

Do bodu P sa dostane lúč 1 s uhlom dopadu $\alpha_B > \alpha_{B0}$ priamym odrazom a na celej dĺžke lúčov 1 – 2 rýchlosťou v_B .

$$t_{12} = \frac{d + y_P}{v_B \cos \alpha_B}.$$

V prípade bočnej vlny je dráha označená lúčmi 3 – 4 – 5, pričom stredná časť zodpovedá rýchlosti v_A

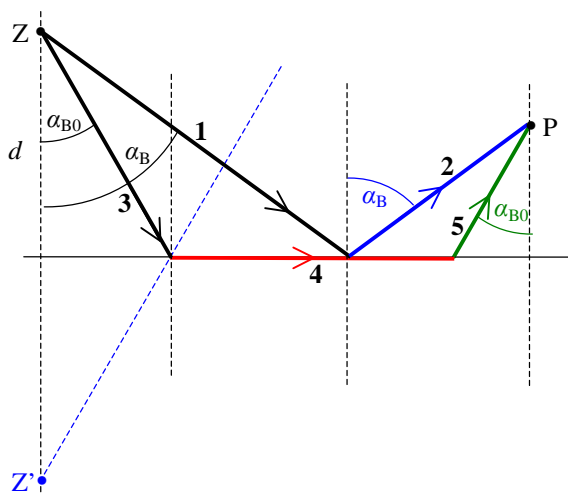
$$t_{345} = \frac{d + y_P}{v_B \cos \alpha_{B0}} + \frac{d + y_P}{v_A} (\operatorname{tg} \alpha_B - \operatorname{tg} \alpha_{B0})$$

Pomer oboch časov upravíme s použitím vzťahu pre medzný uhol dopadu α_{B0}

$$\frac{t_{345}}{t_{12}} = \frac{\cos \alpha_B}{\cos \alpha_{B0}} + \frac{v_B}{v_A} \cos \alpha_B (\operatorname{tg} \alpha_B - \operatorname{tg} \alpha_{B0}) = \cos(\alpha_B - \alpha_{B0}).$$

Keďže $|\alpha_B - \alpha_{B0}| < \pi/2$ rad, je uvedený pomer $t_{345}/t_{12} < 1$. Signál príde prostredníctvom bočnej vlny do bodu P skôr ako signál odrazený.

2 body



Poznámka:

Takéto deje by bolo možno pozorovať napríklad vtedy, keby vo vzduchu nad vodnou hladinou vybuchol nejaký objekt (rýchlosť v_A by v tomto prípade bola približne 4,5-krát väčšia ako v_B). Ak by sme sa nachádzali nad hladinou v dostatočnej vzdialenosti od zdroja, pozorovali by sme, že k nám prichádza aj signál od bočnej vlny, ktorý príde skôr, než signál od vlny odrazenej.

Pri podrobnom skúmaní bočnej vlny treba brať do úvahy, že ide o šírenie vlnenia v priestore, preto by bolo potrebné skúmať aj jeho intenzitu (amplitúdu), teda, či je ho možné detekovať.

Spracované podľa:

L. D. Landau, E. M. Lifšic: *Teoretická fyzika VI: Hidrodinamika*, Moskva Nauka 1986, s. 388 (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц: *Теоретическая физика VI: Гидродинамика*, Москва Наука 1988)

Dodatok 1 (autor návrhu)

Tvar prejdenej vlny.

Krivka popisujúca tvar vlnoplochy prejdenej vlny v čase t môže byť v zapísaná v parametrickom tvare, kde parametrom je uhol dopadu α_B , ktorý môže nadobúdať všetky hodnoty, pre ktoré vlna už prechádza do prostredia A.

Pre $t_2 < t \leq t_4$

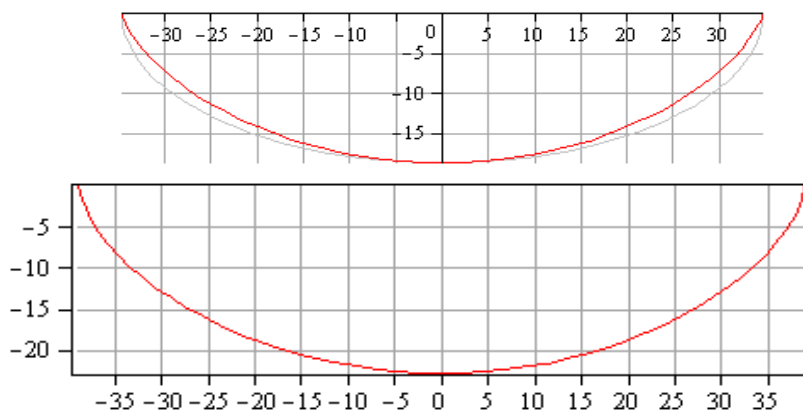
$$x = \operatorname{tg} \alpha_B d + \frac{v_A^2}{v_B} \sin \alpha_B \left(t - \frac{d}{v_B \cos \alpha_B} \right),$$
$$y = -\sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{v_B} \sin \alpha_B \right)^2} v_A \left(t - \frac{d}{v_B \cos \alpha_B} \right).$$

Pre $t \geq t_4$

$$x = d \left[\operatorname{tg} \alpha_B + \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 \sin \alpha_B \left(\frac{1}{\cos \alpha_{B0}} - \frac{1}{\cos \alpha_B} \right) \right] + T \frac{v_A^2}{v_B} \sin \alpha_B,$$
$$y = -\sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{v_B} \sin \alpha_B \right)^2} \left[d \frac{v_A}{v_B} \left(\frac{1}{\cos \alpha_{B0}} - \frac{1}{\cos \alpha_B} \right) + T v_A \right],$$

kde $T = t - t_4 = t - \frac{d}{v_B \cos \alpha_{B0}}$.

Na obrázkoch sú červenou čiarou znázornené vlnoplochy pre hodnoty zadané v úlohe. Horný obrázok pre čas t_4 (pre porovnanie je šedou čiarou vykreslená polelipsa), dolný v čase o 0,07 s neskôr.



7. Experimentálna úloha

10 bodov

50. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori úloh: Tomáš Bzdušek, Ivo Čáp, Arpád Kecskés, Mária Kládiová, Ľubomír Konrád

Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kládiová, Daniel Kluvanec

Redakcia: Ivo Čáp

Vydanie publikácie je hradené z dotácie Ministerstva školstva SR
prostredníctvom IUVENTY v Bratislave

© Slovenská komisia Fyzikálnej olympiády, 2008