

Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória A

Riešenie úloh krajského kola

1. Model rakety

Lubomír Mucha

Po odpálení modelu sa model pohybuje po parabolickej trajektórii šikmého vrhu. Pre kinematické veličiny platia časové závislosti

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \alpha & v_y &= v_0 \sin \alpha - g t \\x &= v_0 t \cos \alpha & y &= v_0 t \sin \alpha - (1/2) g t^2 .\end{aligned}$$

Pre dopad je $y = 0$ a čas dopadu je potom $t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$.

Dolet l_1 je určený súradnicou x v čase t_d

$$l_1 = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha .$$

- a) V najvyššom bode trajektórie je $v_y = 0$ a celková rýchlosť modelu je $v = v_0 \cos \alpha$ vo vodorovnom smere.

Pri odpálení projektilu sú splnené dve podmienky. Podľa zákona zachovania hybnosti je

$$(m_R + m_P) v = m_R v_R + m_P v_P ,$$

kde v_R a v_P sú rýchlosti modelu a projektilu po odpálení projektilu.

Pre rýchlosť odpálenia projektilu platí

$$v_P = v_R - u .$$

(Vzhľadom na odpálenie smerom nazad volíme relatívnu rýchlosť projektilu u vzhľadom na raketu kladnú smerom nazad)

Z týchto rovníc dostaneme

$$v_P = v - \frac{m_R}{m_R + m_P} u \qquad v_R = v + \frac{m_P}{m_R + m_P} u . \qquad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Pozn.: Ak riešiteľ uvažuje $v_P > 0$ smerom nazad, platia všetky vzťahy a výsledky s tým, že v_P sa nahradí $-v_P$.

- b) Prvá časť trajektórie je v oboch prípadoch rovnaká a súradnica vrcholu je $x_V = l_1/2$. Druhá časť trajektórie je vodorovný vrh z výšky h_V . Čas pádu $t_d/2 = (v_0/g) \sin \alpha$. Tento čas je určený zložkou pohybu v zvislom smere a nezávisí od počiatočnej rýchlosti v .

Pre $v = v_0 \cos \alpha$ (bez odpálenia projektilu) je vzdialenosť vodorovného vrhu

$$\Delta x = l_1/2 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = v_0 \cos \alpha \frac{v_0}{g} \sin \alpha = v t_d / 2 .$$

V druhom prípade je po odpálení projektilu rýchlosť modelu v_R a dolet vodorovného vrhu z vrcholu je

$$\Delta x_R = v_R t_d/2 = \left(v_0 \cos \alpha + \frac{m_P}{m_R + m_P} u \right) \frac{v_0}{g} \sin \alpha .$$

Rozdiel doletu modelu rakety v obidvoch pokusoch je

$$d = \frac{m_p}{m_R + m_p} \frac{u v_0}{g} \sin \alpha . \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Po odpálení projektilu absolvuje každé teleso vodorovný vrh s príslušnou počiatočnou rýchlosťou v_R a v_P . Vzdialenosť bodov dopadu je

$$D = \Delta x_R - \Delta x_P = (v_R - v_P) t_d/2 = \frac{u v_0}{g} \sin \alpha . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Keďže obidve telesá padajú z rovnakej výšky, dopadnú súčasne, preto $T = 0$. $\mathbf{1 \text{ bod}}$

i) V prípade $u = v_0 \cos \alpha$

$$v_P = \frac{m_p}{m_R + m_p} v_0 \cos \alpha \quad v_R = \left(1 + \frac{m_p}{m_R + m_p}\right) v_0 \cos \alpha .$$

Projektil sa po odpálení pohybuje v pôvodnom smere pohybu modelu rakety.

Vzájomná vzdialenosť bodov dopadu je

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{l_1}{2} . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

ii) Ak projektil padá po odpálení zvislo nadol, znamená to $v_P = 0$. Tento prípad nastane,

ak $u = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) v_0 \cos \alpha .$

Vzájomná vzdialenosť bodov dopadu je potom

$$D = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) \frac{l_1}{2} . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

iii) Ak má projektil dopadnúť do bodu odpálenia modelu, platí $v_P = -v_0 \cos \alpha$ a teda

$$u = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) 2v_0 \cos \alpha$$

a vzdialenosť bodov dopadu

$$D = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \left(1 + \frac{m_p}{m_R}\right) l_1 . \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

2. Meranie parametrov cievky

Ivo Čáp

Ak má byť výstupné napätie nulové, tzn. $U_{BC} = 0$, musí platiť $U_{BD} = U_{CD}$, resp. $U_{AB}/U_{BD} = U_{AC}/U_{CD}$. To je splnené, ak $Z_{AB}/Z_{BD} = Z_{AC}/Z_{CD}$

$$\frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{R_2}{1+j\omega C_2 R_2}} = \frac{R_1}{R+j\omega L}.$$

Túto rovnicu upravíme na tvar, ktorý umožní porovnať reálne a imaginárne časti

$$(R+j\omega L)(1+j\omega C_2 R_2) = j\omega C_1 R_1 R_2$$

$$R - \omega^2 L C_2 R_2 + j\omega(C_2 R_2 R + L) = j\omega C_1 R_1 R_2.$$

Rovnica platí, ak platí rovnosť reálnych častí a rovnosť imaginárnych častí

$$R - \omega^2 L C_2 R_2 = 0$$

$$C_2 R_2 R + L = C_1 R_1 R_2.$$

Z týchto rovníc určíme parametre cievky

$$L = \frac{C_1 R_1 R_2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2} \qquad R = R_2 \frac{\omega^2 C_1 R_1 C_2 R_2}{1 + (\omega R_2 C_2)^2}. \qquad \mathbf{4 + 4 \text{ body}}$$

Číselne pre dané hodnoty: $L = 10 \text{ mH}$, $R = 2,5 \text{ k}\Omega$.

1 + 1 bod

3. Emisia žiarenia

Ivo Čáp

- a) Podľa Bohrovho modelu sa elektrón pohybuje okolo jadra (protónu) po kružnici. Pre pohyb platia vzťahy pre rovnováhu síl a pre kvantovú podmienku

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (1)$$

$$m v r = n \hbar \quad (2)$$

Z týchto vzťahov dostaneme polomer a rýchlosť pre jednotlivé kvantované dráhy

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m} n^2 \quad v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n}.$$

Energia elektrónu je

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} = E_1 \frac{1}{n^2},$$

kde

$$E_1 = -\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 = -2,19 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,7 \text{ eV}$$

Vlnová dĺžka fotónu emitovaného pri prechode zo stavu n do stavu m je

$$\lambda_{nm} = \frac{2\pi\hbar c}{E_n - E_m} = \frac{2\pi\hbar c}{-E_1} \frac{n^2 m^2}{n^2 - m^2} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Najmenšia energia prechodu do základného stavu je

$$E_{12} = E_1(1 - 1/4) = 10,3 \text{ eV},$$

a zodpovedajúca vlnová dĺžka fotónu

$$\lambda_{12} = \frac{2\pi\hbar c}{E_{12}} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

Zvyšné energie sú väčšie a vlnové dĺžky kratšie. Všetky zložky žiarenia, ktoré zodpovedajú prechodu z vyššej hladiny na základnú spadajú do oblasti ultrafialového žiarenia. **1 bod**

Pre viditeľné svetlo s vlnovými dĺžkami $350 \div 700 \text{ nm}$ dostaneme energie fotónov

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1,77 \div 3,53 \text{ eV}.$$

Dosadením sa možno presvedčiť, že vlnové dĺžky zodpovedajúce prechodom z vyšších hladín na druhú (napr. λ_{23} , λ_{24} atď.) spadajú do oblasti viditeľného svetla (tzv. Balmerova séria). **1 bod**

- b) Pre energiu fotónu E_0 dostaneme príslušnú vlnovú dĺžku žiarenia

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{E_0} = 651 \text{ nm (svetlo červenej farby)}.$$

Pri emisii platí zákon zachovania hybnosti. Ak je na začiatku atóm v pokoji, platí po emisii fotónu $p_f = -p_H$. Z energie E_0 sa časť premení na kinetickú energiu atómu E_H . Energia emitovaného fotónu je potom

$$E_f = E_0 - E_H = E_0 - \frac{p_H^2}{2m_H} = E_0 - \frac{p_f^2}{2m_H} = E_0 - \frac{E_f^2}{2c^2 m_H}.$$

Pre energiu emitovaného fotónu platí $E_f < E_0$. Keďže $E_0 \ll m_H c^2$, platí $E_f \approx E_0$. Potom dostaneme

$$\frac{\Delta E_R}{E_0} \approx -\frac{E_0}{2m_H c^2} \quad \frac{\Delta \lambda_R}{\lambda_0} \approx \frac{E_0}{2m_H c^2} = 1,01 \cdot 10^{-9}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Zmena vlnovej dĺžky spôsobená „spätným rázom“ je zanedbateľne malá.

- c) Zo štatistickej fyziky vyplýva, že na postupný pohyb molekuly (3 stupne voľnosti) pripadá priemerná kinetická energia

$$\left\langle \frac{1}{2} m_H v^2 \right\rangle = 3 \times \frac{1}{2} k_B T,$$

odkiaľ

$$v_k = \langle v^2 \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}} = 12,2 \text{ km/s.}$$

Vzhľadom na pohyb „vysielača“ sa uplatní Dopplerov jav (vzhľadom na malú rýchlosť $v_k \ll c$ použijeme klasický vzťah)

$$f = f_0 \frac{c}{c - v} \Rightarrow \lambda = \lambda_0 \frac{c - v}{c}$$

kde v je rýchlosť približovania zdroja.

Pre zmenu vlnovej dĺžky dostaneme v dôsledku rozptylu rýchlostí $\pm v_k$

$$\frac{\Delta \lambda_D}{\lambda_0} = \frac{2v_k}{c} = 8,1 \cdot 10^{-5}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Táto odchýlka je merateľná už bežnými laboratórnymi prostriedkami. Tento jav predstavuje tzv. dopplerovskú šírku spektrálnej čiary. Podľa nej možno spätne odhadnúť teplotu zdroja.

- d) Fotón emitovaný z povrchu hviezdy stráca časť svojej energie na úkor nárastu je potenciálnej energie

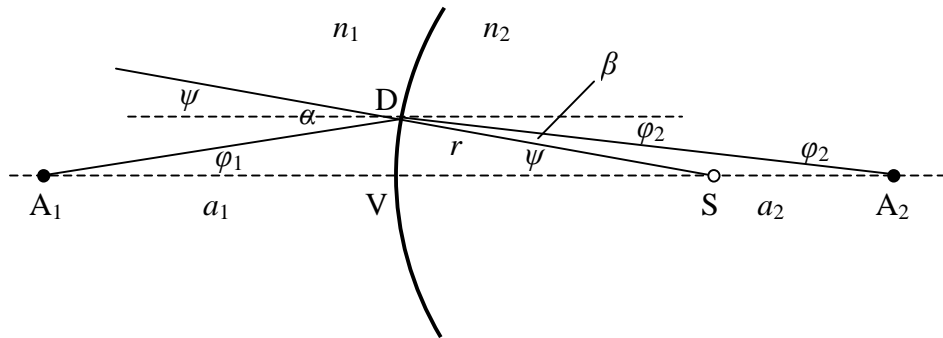
$$\Delta E_f = -\Delta E_p = GM m_f \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Pre veľkú vzdialenosť $r \rightarrow \infty$ a $E_f = m_f c^2 \approx E_0$ dostaneme

$$\frac{\Delta \lambda_G}{\lambda_0} = -\frac{\Delta E_G}{E_0} = \frac{GM}{c^2 R} = 1,5 \cdot 10^{-4}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Tzv. „gravitačný červený posun spektra“ je významný pre hviezdy vo veľmi hustom stave (v našom prípade $\sim 5 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ – „biely trpaslík“).

Obrázok 1 bod



- a) Pre veľmi malý uhol φ_1 je zakrivenie plochy veľmi malé a úsek VD možno považovať za úsečku kolmú na optickú os a tým aj odvesnu v pravouhlých trojuholníkoch A_1VD , A_2VD a SVD . Potom platí pre malé uhly

$$VD = a_1 \varphi_1 = a_2 \varphi_2 = r \psi.$$

Lúč A_1D dopadá na rozhranie pod uhlom α (vzhľadom na kolmicu SD) a láme sa pod uhlom β (úsečka DA_2). Pre tieto uhly platí zákon lomu

$$n_1 \alpha = n_2 \beta.$$

Pre jednotlivé uhly platia vzťahy $\psi = \varphi_2 + \beta$ a $\alpha = \varphi_1 + \psi$.

S použitím uvedených vzťahov dostaneme postupným vylúčením uhlov φ_1 , φ_2 , α , β a ψ rovnicu

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Odvodenie 2 body

Ak sa predmet nachádza v bode A_{1F} – predmetovom ohnisku, sú lúče po prechode rozhraním rovnobežné s optickou osou, čo pre $a_1 = f_p$ znamená $a_2 \rightarrow \infty$. Po dosadení

$$f_p = r \frac{n_1}{n_2 - n_1}.$$

1 bod

Ak dopadajú na rozhranie lúče rovnobežné s optickou osou, sústredia sa po prechode rozhraním v obrazovom ohnisku A_{2F} a teda pre $a_1 \rightarrow \infty$ je $a_2 = f_o$.

$$f_o = r \frac{n_2}{n_2 - n_1}.$$

1 bod

Vidíme, že ak majú východiskové a cieľové prostredia rôzne indexy lomu, sú obidve ohniskové vzdialenosti rôzne.

- b) Označme pre prvé rozhranie predmetovú a obrazovú vzdialenosť a_1 a a'_1 . Potom platí

$$\frac{n_0}{a_1} + \frac{n}{a'_1} = \frac{n - n_0}{r_1}, \text{ kde } n_0 = 1,00 \text{ je index lomu vzduchu.}$$

Pre druhú lámavú plochu označíme predmetovú a obrazovú vzdialenosť a_2 a a'_2 , pričom predmetom druhej plochy je obraz prvej. Keďže je však obraz prvej plochy na opačnej strane od vrcholu druhej plochy, má opačné znamienko $a_2 = -a'_1$. Potom

$$\frac{n}{-a'_1} + \frac{n_0}{a'_2} = \frac{n_0 - n}{r_2}.$$

Sčítaním obidvoch rovníc dostaneme

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_2} = \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

V tomto prípade je predmetová i ohnisková vzdialenosť f_1 rovnaká. Pre optickú mohutnosť D_1 , resp. ohniskovú vzdialenosť f_1 , platí

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx -5,6 \text{ dioptrií.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Záporná optická mohutnosť charakterizuje rozptylku.

- c) Ak vyplníme dutinu vodou, pribudne ďalšia lámavá plocha (rovinná) s $r_3 \rightarrow \infty$. Pre jednotlivé rozhrania platia rovnice

$$\frac{n_0}{a_1} + \frac{n}{a'_1} = \frac{n - n_0}{r_1}, \quad \frac{n}{-a'_1} + \frac{n_v}{a'_2} = \frac{n_v - n}{r_2}, \quad \frac{n_v}{-a'_2} + \frac{n_0}{a'_3} = 0.$$

Sčítaním rovníc dostaneme

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_3} = \frac{1}{n_0} \left(\frac{n - n_0}{r_1} + \frac{n_v - n}{r_2} \right).$$

Pre ohniskovú vzdialenosť, resp. optickú mohutnosť, dostaneme

$$D_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{n_0} \left(\frac{n - n_0}{r_1} + \frac{n_v - n}{r_2} \right) \approx 1,8 \text{ dioptrií a } f_2 \approx 56 \text{ cm.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Podmienka použitia na zaostrovanie lúčov je $D_2 > 0$.

Kladná optická mohutnosť v uvedenom prípade znamená, že sústava rozptylky s vodou je spojka a teda ju možno použiť na sústredenie lúčov a zapálenie drievka.

- d) Ak sú okuliare vo vode, vyjadríme optickú mohutnosť rovnako ako v prípade b) s tým rozdielom, že n_0 okolitého prostredia nahradíme indexom lomu vody n_v

$$D_3 = \frac{1}{f_3} = \left(\frac{n}{n_v} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx -2,2 \text{ dioptrií.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Charakter rozptyliek sa zachová, ale výrazne sa zmení optická mohutnosť.