Fyzikálna olympiáda

50. ročník, školský rok 2008/09
Celoštátne kolo kategórie A
Žilina, 17. 4. 2009

Riešenie teoretických úloh

1. Kyvadlo *Ivo Čáp*

Riešenie:

a) Ťažisko leží na geometrickej osi telesa vo vzdialenosti x od osi otáčania. Pre vzdialenosť x platí vzťah

$$x = \frac{M_b\, b/2}{M_a + M_b} = \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a+b} \approx 20{,}4\ \text{mm}.$$ **1 bod**

Teleso pozostáva z dvoch častí – vodorovnej tyčinky s dĺžkou a a zvislej s dĺžkou b. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania je súčtom momentov obidvoch častí vzhľadom na túto os

$$I = \frac{1}{3} M_b\, b^2 + \frac{1}{12} M_a\, a^2 = \frac{1}{12}\,\frac{M}{a+b}\,(a^3 + 4b^3) \approx 2{,}08 \cdot 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$ **1 bod**

b) Pri odraze sa zachováva moment hybnosti sústavy a pri dokonale pružnom odraze sa zachováva mechanická (kinetická) energia.

$$m v_0 \frac{a}{2} = -m v_1 \frac{a}{2} + I\,\omega_1$$ **1 bod**

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I\,\omega_1^2$$ **1 bod**

kde $v_0 = \sqrt{2gh}$ je rýchlosť dopadu guľôčky, **1 bod**

v_1 je jej rýchlosť po odraze smerom nahor a ω_1 je počiatočná uhlová rýchlosť kyvadla po náraze.

Kyvadlo sa po náraze pohybuje pod účinkom tiažovej sily a pohyb opisuje zákon zachovania mechanickej energie. Pre maximálny uhol α platí (nulová kinetická energia)

$$\frac{1}{2} I\,\omega_1^2 = M\,g\,x\,(1 - \cos\alpha).$$ **1 bod**

Uhlovú rýchlosť vyjadríme z rovníc pre zrážku

$$\omega_1 = \frac{4ma}{4I + ma^2}\, v_0 = \frac{1}{\frac{1}{3}\frac{M}{ma^2}\frac{a^3 + 4b^3}{a+b} + 1}\,\frac{4v_0}{a}.$$

Uhol vychýlenia je

$$\alpha = \arccos\left[1 - \frac{8\,h\,(a^3 + 4b^3)}{3a^2b^2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{M}{m\,a^2}\frac{a^3+4b^3}{a+b}\right)^2}\right] \approx 12{,}5\,° \; (\approx 0{,}22 \text{ rad}).$$

1 bod

Rýchlosť guľôčky po odraze je $v_1 = \dfrac{\frac{1}{3}\frac{M}{m\,a^2}\frac{a^3+4b^3}{a+b} - 1}{\frac{1}{3}\frac{M}{m\,a^2}\frac{a^3+4b^3}{a+b} + 1}\, v_0$

a výška h_1, do ktorej vystúpi po odraze je

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = h\left[\frac{\frac{1}{3}\frac{M}{m\,a^2}\frac{a^3+4b^3}{a+b} - 1}{\frac{1}{3}\frac{M}{m\,a^2}\frac{a^3+4b^3}{a+b} + 1}\right]^2 \approx 13{,}7 \text{ cm}.$$

1 bod

c) Ide o fyzikálne kyvadlo. Rovnovážnou polohou bude prechádzať po náraze guľôčky za čas polovice periódy

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{I}{M\,g\,x}} = \pi\sqrt{\frac{a^3 + 4b^3}{6\,g\,b^2}} \approx 0{,}23 \text{ s.}$$

2 body

2. *Meranie vlastností odporového tenzometra*

Ivo Čáp

Riešenie:

a) Ide o homogénny pásik, ktorého odpor je

$$R_{0t} = \rho\,\frac{N\,l}{h\,d} \approx 56\,\Omega.$$

1 bod

b) Objem pásika je na začiatku $N\,S_0\,l_0$. Ak sa zmení dĺžka, zostáva objem rovnaký $N\,S\,l$.

$S_0\,l_0 = S\,(l_0 + \Delta l)$.

Odpor na začiatku je

$$R_{0t} = \rho\,\frac{N\,l_0}{S_0}$$

a po predĺžení

$$R_t = \rho\,\frac{N\,(l_0 + \Delta l)}{S} = \rho\,\frac{N\,(l_0 + \Delta l)^2}{S_0\,l_0} = R_{0t}\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = R_{0t}\left(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2\right).$$

Pre malé deformácie možno kvadratický člen zanedbať v porovnaní s ostatnými

$$R_t \approx R_{0t}\left(1 + 2\varepsilon\right),$$

odkiaľ dostaneme

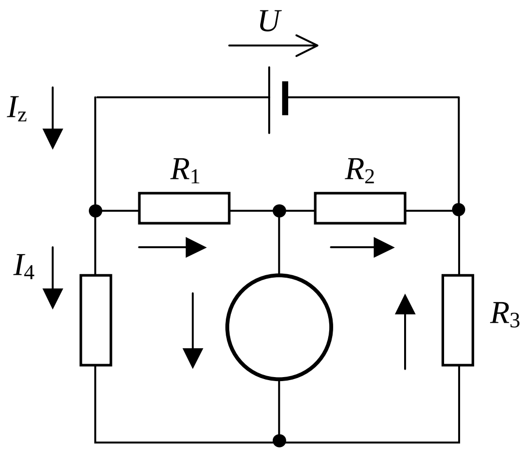
$$\varepsilon = \frac{R_t - R_{0t}}{2\,R_{0t}} = \frac{1}{2}\,r\,.$$

Hľadaná konštanta je $k = 2$. **1 bod**

c) Ak je mostík v rovnováhe a teda prúd ampérmetra je nulový, je na obidvoch svorkách ampérmetra rovnaký potenciál, čo znamená rovnaký deliaci pomer deličov napätia R_1–R_2 a R–R_3, odkiaľ dostaneme

$$R_0 = \frac{R_1}{R_2} R_3 \approx 52\ \Omega.$$

1 bod



d) Ak je mostík nevyvážený opisujú obvod rovnice

$$U = R_1 I_1 + R_2 I_2 \qquad U = R I_4 + R_3 I_3$$

$$0 = R_1 I_1 + R_A I - R I_4 \qquad 0 = I_1 - I_2 - I$$

$$0 = I_1 + I_4 - I_2 - I_3$$

2 body

Postupným vylúčením neznámych prúdov vyjadríme prúd ampérmetra

$$I = U \frac{R_2 R - R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3 + R(R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_3 R_1) + R_A (R_2 + R_1)(R_3 + R)}.$$

Pozn.: Z tohto výrazu tiež vyplýva podmienka rovnováhy $R_0 = R_1 R_3 / R_2$.

Alternatívny postup môže vychádzať z Théveninovej vety

$$I = \frac{U_v}{R_v + R_A}, \textit{ kde } \quad R_v = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R}{R_3 + R} \quad U_v = U \frac{R_2}{R_2 + R_1} - U \frac{R_3}{R_3 + R}.$$

Ak označíme odpor senzora $R = R_0 + \Delta R$, upravíme vzťah pre prúd ampérmetra na tvar

$$I = U \frac{R_2 \Delta R}{R_3 [R_1 R_2 + R_A (R_2 + R_1)] + [R_3 (R_1 + R_2) + R_1 R_2 + R_A (R_1 + R_2)](R_0 + \Delta R)}$$

Po úprave vyjadríme závislosť prúdu od relatívnej zmeny odporu r

$$I = U \frac{R_1 R_2 \ r}{[R_1 (R_2 + R_3) + R_A (R_1 + R_2)](R_1 + R_2) + [R_1 R_2 + (R_3 + R_A)(R_1 + R_2)] R_1 \ r}.$$

2 body

Ak je druhý člen menovateľa podstatne menší ako prvý člen, tzn. ak platí

$$r << \left[1 - \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 (R_2 + R_3) + R_A (R_1 + R_2)}\right] \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \approx 3{,}3 \, ,$$

tento člen zanedbáme a dostaneme lineárny vzťah

$$I = U \frac{R_1 R_2}{[R_1 (R_2 + R_3) + R_A (R_1 + R_2)](R_1 + R_2)} r = k_2 r$$

1 bod

kde $\quad k_2 = U \dfrac{R_1 R_2}{\left[R_1 (R_2 + R_3) + R_A (R_1 + R_2)\right](R_1 + R_2)} \approx 2{,}76\cdot10^{-4}$ A . **1 bod**

e) Prúdu mostíka I = 12 mA zodpovedá relatívna deformácia
$\varepsilon = (1/2)\, r = (1/2)\, I / k_2 \approx 2{,}2\cdot10^{-2} = 2{,}2$ %. **1 bod**

3. Elektromagnetická vlna *Ľubomír Mucha*

Riešenie:

a) Pri interferencii EM vĺn v lineárnom prostredí je výsledné EM pole dané vektorových súčtom elektrickej intenzity interferujúcich vĺn. V našom prípade je

$$E(x,t) = E_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + E_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_2) =$$

$$= 2\, E_1 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t - k\,x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \qquad \textbf{1 bod}$$

Vlnová dĺžka EM vlny je $\lambda = cT = \dfrac{2\pi c}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \approx 30$ m. **1 bod**

Intenzita výslednej vlny je

$$I_{v1} = \frac{1}{2Z}\left(2E_1 \cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{E_1^2}{2Z}\, 2\,(1+\cos\varphi) = 2\, I_1\,(1+\cos\varphi) \approx 98{,}3 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2} \qquad \textbf{1 bod}$$

Intenzita výslednej vlny sa mení v rozsahu $\langle 0, 2I_1\rangle$ a nezávisí od súradnice x.

b) Vlnenie, ktoré sa šíri v opačnom smere sa vyznačuje vlnovým číslom $-k$. Elektrická intenzita výsledného poľa je potom

$$E(x,t) = E_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + E_1 \sin(\omega t + kx + \varphi_2) =$$

$$= 2\, E_1 \cos\left(k\,x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \qquad \textbf{1 bod}$$

Z výsledného vzťahu vidno, že ide o „stojatú vlnu“, ktorá sa v priestore nešíri. Existujú napr. súradnice x_{0n}, pre ktoré je $k\,x_{0n} + \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = (2n+1)\,\dfrac{\pi}{2}$, pre ktoré je $E(x_{0n},t) = 0$ („uzly“). Tieto uzly majú fixnú polohu.

Intenzita vlny v zmysle definície je

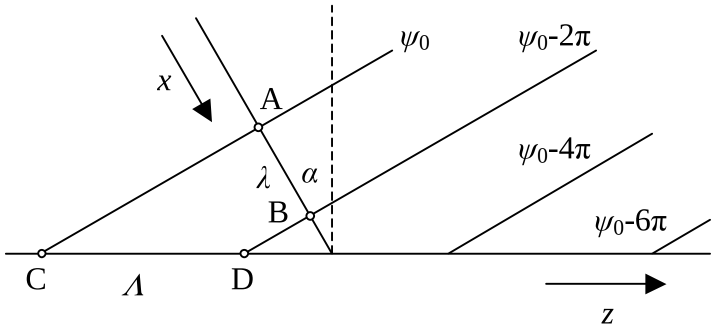
$$I_{v2} = \frac{1}{2Z}\left[2E_1 \cos\left(k\,x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right]^2 = 2I_1\left[1 + \cos(2\,k\,x - \varphi)\right]. \qquad \textbf{1 bod}$$

Intenzita sa mení pozdĺž osi x periodicky v rozsahu hodnôt $\langle 0, 2I_1\rangle$ s periódou

$$L = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \approx 15 \text{ cm}. \qquad \textbf{1 bod}$$

c) Rovinná EM vlna dopadá šikmo na rovinnú plochu pod uhlom α. V obrázku sú vyznačené vlnoplochy s fázovým rozdielom 2π rad. V smere x je ich vzdialenosť AB rovná vlnovej dĺžke λ, pričom rýchlosť šírenia vlny je $c = \lambda / T = \lambda\, f$.

Za čas jednej periódy sa miesto danej fázy ψ_0 posunie z bodu C do bodu D. Vzdialenosť CD označíme Λ - vlnová dĺžka pre šírenie konštantnej fázy pozdĺž rozhrania. Tomu zodpovedá vlnové číslo



$K = 2\pi / \Lambda = 2\pi \sin\alpha / \lambda = \omega \sin\alpha / c = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \sin\alpha$.

Časová závislosť fázy je $\psi = \psi_0 + \omega t - K z$. **1 bod**

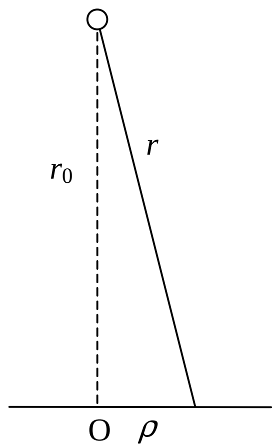
Rýchlosť postupu bodu konštantnej fázy pozdĺž rozhrania je

$v = \Lambda / T = \omega / K = c / \sin\alpha = 1/ (\sqrt{\mu\varepsilon} \sin\alpha) \approx 6{,}0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **1 bod**

Pozn.: Rýchlosť je väčšia ako rýchlosť svetla vo vákuu, čo však nie je v rozpore s teóriou relativity, lebo nejde o rýchlosť prenosu hmoty.

d) Z bodového zdroja sa šíri vlna na všetky strany rýchlosťou c. Fáza vo vzdialenosti r je

$\psi = \omega t - k r + \psi_0$.



Ak zvolíme v rovine dopadu polárny súradnicový systém (ρ, β) s počiatkom v bode O, je množinou bodov rovnakej fázy v rovine dopadu kružnica. Ak položíme v bode O $\psi_0 = k r_0$ a teda fáza v bode O je $\psi = \omega t$, je fáza vo vzdialenosti ρ od počiatku

$\psi(\rho,t) = \omega t - k (r - r_0) = \omega t - k (\sqrt{r_0^2 + \rho^2} - r_0)$.

Ak platí pre vzdialený zdroj $\rho \ll r_0$, upravíme vzťah na tvar $\psi(\rho,t) \approx \omega t - \frac{k}{2 r_0} \rho^2$. **1 body**

e) Ak je v bode O fáza obidvoch vĺn rovnaká, je v tomto bode interferenčné maximum. Tmavým prúžkom zodpovedá opačná fáza obidvoch vĺn. Fáza rovinnej vlny je v celej rovine dopadu rovnaká, fáza guľovej vlny sa so zmenou súradnice ρ mení podľa predchádzajúceho vzťahu. Pre tmavé prúžky platí

$\frac{k}{2 r_0} \rho_n^2 = (2n - 1)\,\pi$ a teda $\rho_n = \sqrt{\frac{2 r_0}{k} (2n - 1)\,\pi}$, kde n = 1, 2, ... **1 body**

4. ***Rádioaktivita*** *(Ivo Čáp, Arpád Kecskés, Ľubomír Konrád)*

Riešenie:

a) Aktivita vzorky je daná vzťahom $A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha N$, **1 bod**

kde N je počet nepremenených jadier rádioaktívnej látky a α koeficient premeny. Z uvedeného vzťahu vyplýva zákon rádioaktívnej premeny

$$N(t) = N_0\, e^{-\alpha t}.$$

Polčas premeny (čas za ktorý sa premení polovica jadier) je

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Aktivitu vyjadríme v tvare $$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0\, e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} = A_0\, e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}. \qquad (1)$$

Pomer poklesu aktivity je $\frac{A}{A_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} \approx 32\ \%$. **3 body**

b) Počet molekúl CO_2 a tým aj atómov C je určený stavovou rovnicou $p\,V = N_C\, k_B\, T$.

Ak uvážime, že za celé historické obdobie sa počet atómov N_C prakticky nezmenil. Počiatočná aktivita v čase výroby trámu bola $A_0 = (\eta_0\, N_C) \ln 2 / T_{1/2}$. Po čase t aktivita poklesla podľa vzťahu (1). Pre čas t dostaneme vzťah

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(\frac{\eta_0\, pV \ln 2}{k_B\, T\, A\, T_{1/2}}\right) \approx 573 \text{ rokov.}$$ **3 body**

c) Argón, ktorý vznikol po čase stuhnutia horniny, zostal uzatvorený v jej vnútri. Z pôvodného počtu jadier draslíka N_{0K} po čase vývoja zostalo N_K jadier draslíka a $N_{Ar} = N_{0K} - N_K$ jadier argónu, kde

$$N_K = N_{0K}\, e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}.$$

Z pomeru $$\eta = \frac{N_{Ar}}{N_K} = \frac{N_{0K} - N_K}{N_K} = \frac{N_{0K}}{N_K} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} - 1$$

dostaneme čas $t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln(\eta + 1) \approx 4{,}37$ mld rokov, **3 body**

čo zodpovedá veku Slnečnej sústavy.

50. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy celoštátneho kola kategórie A*

Autori úloh: Ivo Čáp, Ľubomír Mucha, Arpád Kecskés, Ľubomír Konrád
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp
Vydanie publikácie je hradené z dotácie Ministerstva školstva SR prostredníctvom IUVENTY v Bratislave