

# Fyzikálna olympiáda

50. ročník, školský rok 2008/09  
Celoštátne kolo kategórie A  
Žilina, 17. 4. 2009

Zadanie teoretických úloh

## 1. Kyvadlo

Ivo Čáp

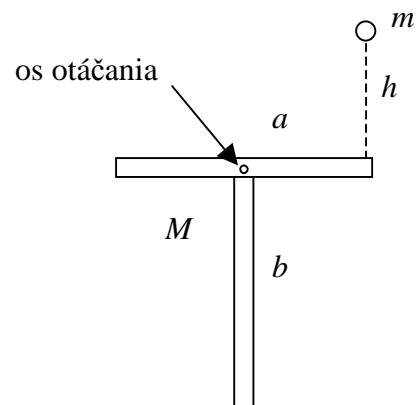
Kyvadlo tvaru T (obrázok) je tvorené vodorovnou tyčinkou dĺžky  $a$  a zvislou tyčinkou dĺžky  $b$ . Obidve tyčinky majú rovnaký obsah prierezu a sú z rovnakého materiálu. Hmotnosť kyvadla je  $M$ .

Na koniec vodorovného ramena kyvadla dopadne z výšky  $h$  guľôčka s hmotnosťou  $m$ . Náraz guľôčky považujeme za dokonale pružný.

- Aká je vzdialenosť ťažiska  $x$  kyvadla od osi otáčania a aký je moment zotrvačnosti  $I$  kyvadla vzhľadom na os otáčania.
- O aký maximálny uhol  $\alpha$  sa odchýli kyvadlo z rovnovážnej polohy v dôsledku dopadu guľôčky a do akej výšky  $h_1$  sa guľôčka odrazí?
- Za aký čas od okamihu nárazu guľôčky sa rameno kyvadla vráti do vodorovnej polohy. (Predpokladajte, že uhol  $\alpha \ll 1$  rad).

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty:

$M = 20$  g,  $a = 50$  mm,  $b = 70$  mm,  $m = 750$  mg,  $h = 15$  cm,  $g = 9,8$  m·s<sup>-2</sup>. Hrúbka tyčiniek je zanedbateľne malá v porovnaní s ich dĺžkami. Opätovný dopad guľôčky na rameno kyvadla neuvažujte. Moment zotrvačnosti tenkej tyče vzhľadom na os prechádzajúcu jej ťažiskom je rovný  $(1/12) m l^2$ , kde  $m$  je hmotnosť tyče a  $l$  jej dĺžka.



## 2. Meranie vlastností odporového tenzometra

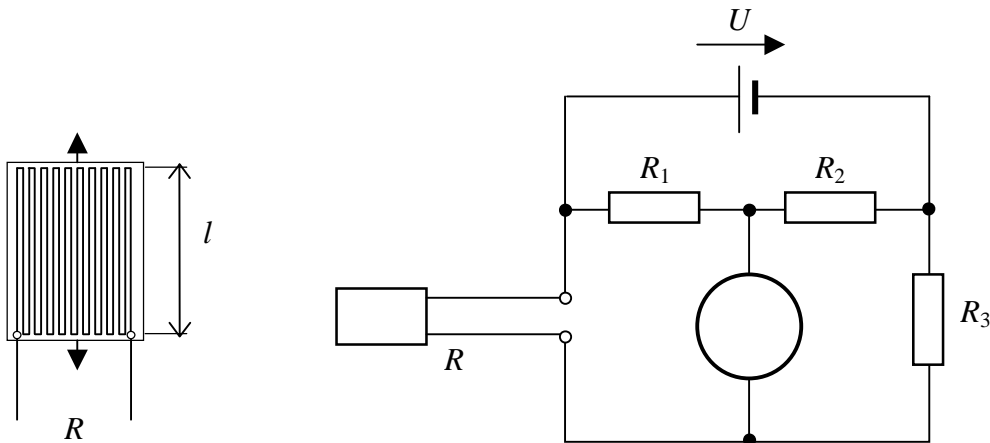
Ivo Čáp

Odporový tenzometer je senzor, ktorého odpor sa mení pri jeho pozdĺžnej deformácii. Pozostáva z pružnej podložky, na ktorej je nanosený tenký pásik rezistívneho materiálu v tvare meandra (obrázok). Pri napínaní senzora v smere šípok sa deformujú pozdĺžne časti pásika a tým sa mení ich odpor.

- Tenzometrický senzor obsahuje  $N = 20$  pozdĺžnych pásikov s dĺžkou  $l = 15$  mm, hrúbkou  $h = 25$   $\mu$ m, a šírkou  $d = 0,30$  mm. Rezistivita materiálu pásika je  $\rho = 1,4 \cdot 10^{-6}$   $\Omega \cdot$ m. Určte teoretickú hodnotu odporu  $R_{0t}$  nezaťaženeho senzora. Odpor priečných pásikov považujte za zanedbateľne malý v porovnaní s odporom pozdĺžnych pásikov.
- Relatívne predĺženie  $\varepsilon = \Delta l / l$  sa prejaví relatívnou zmenou odporu  $r = \Delta R / R$ , pričom v oblasti malej pružnej deformácie  $\varepsilon \ll 1$  platí  $r \approx k_1 \varepsilon$ , kde  $k_1$  je konštanta. Určte

výpočtom konštantu  $k_1$  pre uvedený tenzometer. *Pozn.: Pri deformácii považujte objem pásika za konštantný. Malé veličiny 2. rádu zanedbajte.*

- c) Na určenie odporu tenzometra sa používa mostíkové zapojenie podľa schémy na obrázku. Pre daný prípad sa použili prvky obvodu s hodnotami  $U = 10,0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 9,44 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 22,5 \text{ k}\Omega$ . Na meranie prúdu sa použil ampérmetr s vnútorným odporom  $R_A = 856 \Omega$ . Po pripojení nezaťaženeho tenzometra sa nastavila hodnota rezistora  $R_3$  na hodnotu  $R_3 = 124 \Omega$ , pri ktorej bol prúd ampérmetra nulový. Aká je takto určená hodnota odporu  $R_0$  nezaťaženeho tenzometra?



Keď sa tenzometer deformuje, prechádza ampérmetrom mostíka prúd.

- d) Odvodte vzťah vyjadrujúci závislosť prúdu  $I$  od relatívnej zmeny odporu  $r$  tenzometra pre dané hodnoty prvkov obvodu. Ukážte, že pre  $r \ll 1$  možno vzťah považovať za lineárny a určte konštantu úmernosti  $k_2$  v tomto lineárnom vzťahu  $I = k_2 r$ .
- e) Určte relatívne predĺženie tenzometra zodpovedajúce prúdu  $I = 12 \mu\text{A}$ , ak bol mostík pri nedeformovanom tenzometri vyvážený.

### 3. Elektromagnetická vlna

Lubomír Mucha

Elektromagnetická (EM) vlna (napr. svetlo) je reprezentovaná vzájomne kolmými vektormi elektrickej a magnetickej intenzity  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ . Ak sa nachádzame dostatočne ďaleko od zdroja, možno vlnu považovať za rovinnú. Pre rovinnú vlnu možno vyjadriť závislosť elektrickej intenzity od polohy a času vzťahom

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi),$$

kde  $\mathbf{k}$  je vlnový vektor, ktorý udáva v prípade homogénneho a izotropného prostredia smer šírenia vlnenia a má veľkosť  $k = 2\pi/\lambda$  (vlnové číslo), kde  $\lambda$  je vlnová dĺžka vlnenia. Pre vlnu, ktorá sa šíri v smere osi  $x$ , možno fázu vlny vyjadriť v tvare  $\psi = \omega t - kx + \varphi$ .

V prípade, keď sa stretnú viaceré EM vlny, dochádza k interferencii vlnení, ktorá je v lineárnom prostredí daná vektorovým skladaním vektorov  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  týchto vln.

Smer vektora  $\mathbf{E}$  udáva smer polarizácie EM vlny v danom mieste.

EM vlna je nositeľom energie EM poľa, pričom veľkosť vektorového súčinu  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  udáva výkon EM vlny, ktorý prechádza jednotkovou plochou kolmou na smer šírenia v danom mieste a čase. Medzi veľkosťami elektrickej a magnetickej intenzity platí v lineárnom prostredí vzťah  $E = ZH$ , kde  $Z$  je impedancia prostredia. V nevodivom prostredí sa EM vlnenie šíri rýchlosťou  $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$  a impedancia prostredia je  $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ , kde  $\mu$  a  $\varepsilon$  sú

magnetická permeabilita a elektrická permitivita prostredia. Stredná hodnota výkonu na jednotkovú plochu sa nazýva intenzita EM vlny<sup>1</sup> a pre nevodivé prostredie je

$$I = \langle E H \rangle = \frac{1}{Z} \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt = \frac{E_0^2}{Z} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kx + \varphi) dt = \frac{E_0^2}{2Z}.$$

- Dve EM vlny s rovnakou uhlovou frekvenciou  $\omega = 2\pi \cdot 10^7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , rovnakou polarizáciou a rovnakou intenzitou  $I_1 = 25 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$  sa šíria vo vzduchu spoločne v rovnakom smere osi  $x$ . Fázové konštanty vln sú  $\varphi_1 = \pi/3 \text{ rad}$  a  $\varphi_2 = \pi/4 \text{ rad}$ . Napíšte funkciu opisujúcu závislosť elektrickej intenzity  $E$  výslednej vlny od súradnice  $x$  a času  $t$ . Určte vlnovú dĺžku  $\lambda_1$  a intenzitu  $I_{v1}$  výslednej vlny, ktorá vzniká v dôsledku interferencie obidvoch vln, ako funkciu rozdielu fázových konštánt  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Ukážte, ako sa intenzita mení so zmenou súradnice  $x$ .
- Riešte úlohu a) za predpokladu, že sa obidve vlny šíria v opačnom smere. Napíšte funkciu opisujúcu závislosť elektrickej intenzity  $E$  výslednej vlny od súradnice  $x$  a času  $t$ . Určte intenzitu  $I_{v2}$  výslednej vlny, ktorá vzniká interferenciou obidvoch vln a ukážte, že sa intenzita periodicky mení so súradnicou  $x$ . Určte dĺžku  $L$  jednej periódy tejto zmeny.
- Rovinná EM vlna s vlnovou dĺžkou  $\lambda = 15 \text{ cm}$  dopadá zo vzduchu na rovinnú plochu pod uhlom dopadu  $\alpha = 30^\circ$  (uhol medzi smerom šírenia a kolmicou k ploche). Vyjadrite závislosť fázy  $\psi$  od času  $t$  a súradnice  $z$ , pozdĺž priesečnice roviny dopadu a plochy, na ktorú vlna dopadá. Určte rýchlosť šírenia bodu s danou fázou  $\psi_0$  pozdĺž plochy v smere  $z$ .
- Uvažujme EM vlnu s vlnovou dĺžkou  $\lambda$ , ktorá sa šíri od vzdialeného bodového zdroja kolmo na rovinnú plochu. Vzdialenosť zdroja od plochy je  $r_0 \gg \lambda$ . Akú krivku predstavuje množina bodov rovnakej fázy v rovine dopadu. V rovine plochy si zvolte súradnicový systém a vyjadrite fázu vlny v rovine plochy ako funkciu súradníc a času.
- Na rovinnú plochu dopadajú dve vlny s rovnakými vlnovými dĺžkami a rovnakými amplitúdami. Prvá je rovinná vlna dopadajúca kolmo na plochu, druhá vychádza z bodového zdroja vo veľkej kolmej vzdialenosti od plochy  $r_0 \gg \lambda$ . Na kolmici k ploche, ktorá prechádza zdrojom druhej vlny, sú fázy obidvoch vln rovnaké. Určte súradnice bodov na ploche, v ktorých nadobúda intenzita výslednej vlny minimálnu hodnotu (tmavé krúžky) a určte polomery tmavých krúžkov  $\rho_n$ , ak je splnený predpoklad  $\rho_n \ll r_0$ .

Úlohu riešte všeobecne a potom pre dané hodnoty. Pre vzduch je  $\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ .

*Pomôcky:*

Pre  $x \ll 1$  platí  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ ;  $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$ ,  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

<sup>1</sup> Treba rozlišovať rôzne veličiny: „elektrická intenzita  $E$ “ a „intenzita EM vlny  $I$ “.

#### 4. Rádioaktivita

(Ivo Čáp, Arpád Kecskés, Lubomír Konrád)

Rádioaktivita je jav, ktorý sa využíva vyše 100 rokov od jej objavu pre rôzne účely. Ukážky využitia rádioaktívnej premeny sú v nasledovných úlohách.

- a) Jednou z rádioaktívnych tomografických metód používaných v lekárstve je PET (Positron Emission Tomography). Využíva rádioaktívne preparáty s krátkou dobou premeny, ktoré sa získavajú pomocou cyklotrónu. Nevýhodou je rýchly pokles aktivity preparátu. PET využíva rádioaktívny izotop  $^{18}\text{F}$  s polčasom premeny 110 minút. Určte v akom pomere poklesne aktivita  $A$  preparátu za čas 3 hodiny, kým sa dostane z výroby do lekárskeho zariadenia.

*Pozn.: Aktivita vzorky  $A$  udáva počet premien jadier vzorky rádioaktívnej látky za jednotku času, jednotka v sústave SI je 1 Bq (becquerel).*

- b) Rádioaktivita sa využíva pri datovaní archeologických nálezov. Pri určovaní veku fosílnych nálezov (zvyškov organického pôvodu) do veku niekoľkých desiatok tisícov rokov sa vychádza z predpokladu, že v živých organizmoch je stály pomer koncentrácie rádioaktívneho izotopu uhlíka  $^{14}\text{C}$  s polčasom premeny 5 700 rokov a koncentrácie stabilných izotopov  $^{12}\text{C}$  a  $^{13}\text{C}$  rovný  $\eta_0 = 9,0 \cdot 10^{-11}$  (pomer zodpovedá atmosférickému uhlíku). Po odumretí zastúpenie  $^{14}\text{C}$  klesá v dôsledku rádioaktívnej premeny.

Z nálezu trámu sa získal oxid uhličitý ( $V = 100 \text{ ml CO}_2$  pri  $T = 293 \text{ K}$ ,  $p = 100 \text{ kPa}$ ). Zmeraná aktivita vzorky je  $A = 0,80 \text{ Bq}$ . Pred koľkými rokmi sa spílili strom, z ktorého bol trám vyrobený?

*Pozn.: Molárna hmotnosť  $\text{CO}_2$  je  $44 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , Boltzmannova konštanta  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ .*

- c) Pri určovaní veku horniny dovezenej z Mesiaca sa použila argónová metóda. Pomocou hmotnostnej spektroskopie sa v mesačnej hornine zistil pomer stabilných atómov  $^{40}\text{Ar}$  a rádioaktívnych atómov  $^{40}\text{K}$  rovný  $\eta = 10,3$ . Vychádzalo sa z predpokladu, že všetok argón obsiahnutý vo vnútri horniny vznikol premenou rádioaktívneho draslíka  $^{40}\text{K}$  s polčasom premeny  $1,25 \cdot 10^9$  rokov. Zistite vek horniny.