

Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória B

Riešenie úloh domáceho kola

1. Pohyb cievky

Ivo Čáp

Na teleso pôsobia sily F – ťahová, F_g – tiažová, F_n – normálová reakcia podložky a F_t – trenia.

Všetky deje závisia od pôsobenia týchto síl.

Rovnica pohybu vo vodorovnom smere je

$$m a = F \cos \alpha - F_t. \quad (1)$$

Ak zostáva valec v kontakte s podložkou, platí pre zvislý smer (nulové zrýchlenie)

$$0 = F_n + F \sin \alpha - F_g. \quad (2)$$

Rovnica otáčavého pohybu vzhľadom na os cievky má tvar

$$I \varepsilon = R F_t - r F, \quad (3)$$

kde I je moment zotrvačnosti cievky vzhľadom na jej os, r je rameno sily F .

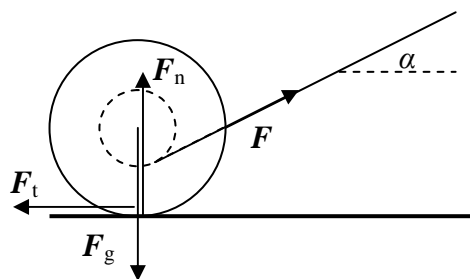
K týmto rovniciam sa pridávajú ďalšie dodatočné podmienky

- pre klzanie cievky ide o šmykové trenie a platí $F_t = f F_n$, (4)

- pre valivý pohyb platí podmienka statického trenia $F_t < f F_n$ (5)

$$a = R \varepsilon. \quad (6),$$

kde f je koeficient trenia (v tomto prípade nerozlišujeme koeficient šmykového a statického trenia).



a) Ak sa cievka neotáča, vyplýva z rovnice (3) pre $\varepsilon = 0$ podmienka

$$F r = F_t R.$$

Keďže sa cievka klže, ide o šmykové trenie (4) a s použitím (2) dostaneme pre

$$\text{požadovaný uhol } \alpha \text{ podmienku} \quad \sin \alpha = \frac{F_g}{F} - \frac{r}{f R}. \quad (7)$$

Vidíme, že táto podmienka závisí od veľkosti ťahovej sily F . Sila F ovplyvňuje zrýchlenie klzavého pohybu $a > 0$, pričom medzný stav predstavuje rovnomerný pohyb $a = 0$. S použitím rovníc (1), (2) a (4) spolu s (7) dostaneme pre medzný uhol

$$\cos \alpha_m = \frac{r}{R} \quad (8)$$

$$\text{a potrebnú ťahovú silu} \quad F_m = \frac{f F_g}{\cos \alpha_m + f \sin \alpha_m} = \frac{R}{r + f \sqrt{R^2 - r^2}} f F_g. \quad (9)$$

Ak je ťahová sila väčšia $F > F_m$, musí sa uhol α prispôbiť (zmenšiť), aby pohyb zostal klzavý bez prešmykovania a bez rotácie.

Z praktického hľadiska experimentátora je najjednoduchšie udržiavať cievku v rovnomernom pohybe.

3 body

b) Pri vlastnom predvážaní chceme dosiahnuť kotúľanie cievky (valivý pohyb) k sebe alebo od seba. Ak použijeme vzťah (6), dostaneme

$$a = \frac{F}{m} \frac{\cos \alpha - r/R}{1 + I/mR^2}. \quad (10)$$

Aj v tomto prípade dostaneme pre medzný stav $a = 0$ podmienku (8). Ak uhol mierne zväčšíme ($\cos \alpha$ sa zmenší), dostaneme $a < 0$ a cievka sa bude od nás vzd'alovať – bude sa kotúľať v opačnom smere ako je smer ťahu. Ak uhol α zmenšíme, dostaneme $a > 0$, tzn. cievka sa bude pohybovať v smere ťahu pásu, teda bude sa k experimentátorovi približovať.

Pre valivý pohyb platí podmienka (5). S použitím predchádzajúcich výsledkov dostaneme pre zrýchlenie podmienku

$$F < f F_g \frac{1 + (I/mR^2)}{r/R + f \sin \alpha + (I/mR^2)(\cos \alpha + f \sin \alpha)} = F_{ms}. \quad (11)$$

Pozn.: Ak dosadíme $\alpha = \alpha_m$, dostaneme na pravej strane nerovnice výraz (9).

Ak prekročí sila ťahu F uvedenú podmienku, bude sa cievka pri pohybe preklízať.

Pre podmienku šmykového trenia (4) dostaneme s použitím rovníc (1) a 2)

$$m a = F (\cos \alpha + f \sin \alpha) - f F_g.$$

Pre dostatočne veľkú silu F bude $a > 0$, a teda cievka sa pohybuje smerom k experimentátorovi.

Pohyb cievky v opačnom smere ($a < 0$) je daný podmienkou

$$F < \frac{f F_g}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = F_{mk}.$$

Ak medznú silu pre valivý pohyb (11) upravíme na tvar

$$\frac{f F_g}{\frac{r/R - \cos \alpha}{1 + (I/mR^2)} + \cos \alpha + f \sin \alpha} = F_{ms},$$

vidíme, že pre $\alpha > \alpha_m$ a teda $\cos \alpha < r/R$ je $F_{mk} > F_{ms}$. Existuje teda aj interval sily F , pre ktorý sa môže cievka od experimentátora vzd'alovať aj pri preklízaní.

Pri preklízaní sa však odvíja pás viac, ako by zodpovedalo valivému pohybu a po niekoľkých opakovaní sa celkom odvinie. Ak sa však dodrží podmienka valivého pohybu, pás sa pri vzd'alovaní cievky odvíja a pri opačnom pohybe rovnako navíja. Pohyb cievky „hore – dole“ sa môže stále opakovať.

4 body

- c) Z výsledkov vidíme, že uhol α_m nezávisí od hmotnosti m cievky. S hmotnosťou m sa úmerne menia medzné hodnoty sily. Pre cievku s malou hmotnosťou preto treba narábať s experimentálnou zostavou jemnejšie ako v prípade ťažkej cievky.

Rovnaký záver platí aj pre vplyv koeficientu trenia na experiment.

Pokiaľ ide o pomer r/R , ten určuje hranicu α_m a tým aj medznú silu F_m . So zmenou uhla α_m sa mení hodnota menovateľa vo výraze (9). Extrémnu hodnotu dostaneme

$$\text{z podmienky nulovej derivácie } (\cos \alpha_m + f \sin \alpha_m)' = -\sin \alpha_m + f \cos \alpha_m = 0,$$

$$\text{odkiaľ dostaneme podmienku } \operatorname{tg} \alpha_m = f.$$

$$\text{Z podmienky druhej derivácie } (\cos \alpha_m + f \sin \alpha_m)'' = -\cos \alpha_m - f \sin \alpha_m < 0$$

vidíme, že ide o maximum výrazu a teda minimum sily F_m .

Okolo tejto hodnoty je regulácia pohybu najcitlivejšia.

O záveroch analýzy sa možno najlepšie presvedčiť experimentom.

3 body

2. Kyslík v atmosfére Zeme

Ivo Čáp

- a) Tiažová sila na Zemi ako rotujúcom telese je výslednica gravitačnej sily a odstredivej sily. Pre jednoduchosť ak uvažujeme že Zem je homogénna guľa, gravitačná sila smeruje do stredu Zeme, zatiaľ čo odstredivá sila má smer kolmý na os otáčania.

V zemskej osi sa odstredivá sila neprejaví a tiažová sila je iba gravitačná

$$F_{to} = G \frac{M m}{(R+h)^2} = m G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2} = m g_n \frac{R^2}{(R+h)^2}, \quad (1)$$

kde $g_n = G \frac{M m}{R^2} \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je gravitačné zrýchlenie na povrchu Zeme

(pre $M \approx 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $G \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$)

V rovine rovníka je odstredivá sila orientovaná opačne vzhľadom na gravitačnú silu a výsledná tiažová sila je

$$F_{tr} = G \frac{M m}{(R+h)^2} - m \omega^2 (R+h) = m \left[g_n \frac{R^2}{(R+h)^2} - \omega^2 (R+h) \right] = m g(h), \quad (2)$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a $g(h)$ je tiažové zrýchlenie nad rovníkom vo výške h .

(pre $T \approx (24 \text{ h}) (3600 \text{ s}\cdot\text{h}^{-1}) \approx 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$).

Pozn.: Pri presnosti na dve platné číslice je $g = g(0) \approx g_n$. Vplyv odstredivej sily sa prejaví až na tretej platnej číslici.

Nad rovníkom dosiahne tiažová sila nulovú hodnotu vo výške

$$h_m = \sqrt[3]{g \frac{R^2}{\omega^2} - R} \approx 35,8 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 5,6 R. \quad (3)$$

Atmosféra sa otáča spolu so Zemou. Ak sa častica nachádza vo výške $h < h_m$, prevažuje príťažlivosť k Zemi, pre $h > h_m$ prevažuje odstredivá sila a častica z atmosféry uniká.

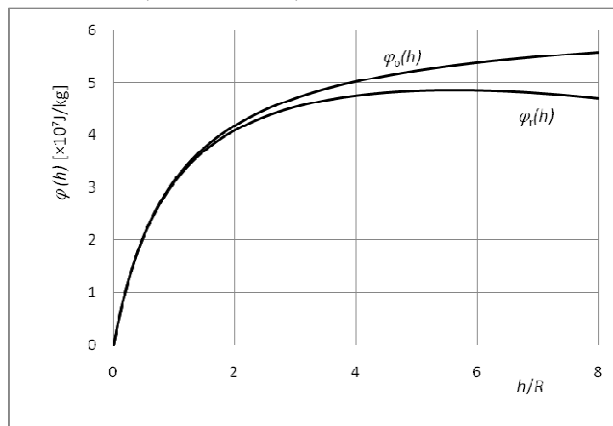
Polomer orbitálnej dráhy, na ktorej sa pohybujú stacionárne družice Zeme, je približne 6,6 – násobkom zemskeho polomeru. Stacionárna družica sa nachádza stále nad rovnakým miestom nad rovníkom.

Ak uvážime tiažovú silu (2), je potenciálna energia vo výške h nad rovníkom vzhľadom na povrch Zeme daná jej integrálom

$$E_{pr}(h) = \int_0^h F_{tr} dh = m \left[g_n R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 [(R+h)^2 - R^2] \right] = m \varphi_r(h).$$

Závislosť potenciálnej energie pozdĺž zemskej osi vzhľadom na povrch Zeme je

$$E_{po}(h) = \int_0^h F_{to} dh = m g_n R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h_m} \right) = m \varphi_o(h)$$



Z grafu vidno, že $\varphi_o(h)$ monotónne rastie, čo zodpovedá príťažlivej sile. Potenciál nad rovníkom $\varphi_r(h)$ má maximum pre $h/R \approx 5,6$ (pozri vzťah (3)). Od tejto výšky má sila smer od Zeme.

2 body

- b) Atmosféru považujeme za ideálny plyn v stave termodynamickkej rovnováhy. Pre zjednodušenie uvažujeme konštantnú teplotu (v skutočnosti sa teplota s výškou mení, ale keďže podstatná časť plynu sa nachádza vo výške do 10 km, vedie predpoklad konštantnej teploty na pomerne dobrý odhad skutočných pomerov).

Tiažová sila pôsobí na plyn v atmosfére a vyvoláva atmosférický tlak. Podstatná časť hmotnosti atmosféry sa nachádza v tenkej vrstve pri povrchu Zeme s hrúbkou desiatok kilometrov. V tomto rozsahu výšky možno považovať tiažové zrýchlenie za konštantné a rovné g . Pre pokles tlaku s výškou platí vzťah

$$dp = -\rho g dh,$$

kde dh je malý prírastok výšky a ρ hustota vzduchu vo výške h .

Hustotu plynu určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = N k_B T = \frac{m}{M_m} R_m T = \frac{\rho V}{M_m} R_m T,$$

kde $R_m \approx 8,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, M_m je molárna hmotnosť, $N = n N_A$ je počet molekúl v objeme V , $N_A \approx 6,0\cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ je Avogadrova konštanta.

Odtiaľ
$$\rho = \frac{p M_m}{R_m T}.$$

Po dosadení do vzťahu pre zmenu tlaku dostaneme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{R_m T} dh.$$

Integráciou tejto rovnice v rozsahu výšok, v ktorých možno považovať tiažové zrýchlenie za konštantné (pre výšky $h \ll R$) dostaneme

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{M_m g}{R_m T} h, \text{ odkiaľ } p = p_0 e^{-\frac{M_m g}{R_m T} h}.$$

Ak pre danú zložku plynu uvažíme $M_m = \mu N_A$, kde μ je hmotnosť molekuly a ďalej priamu úmernosť tlaku koncentrácii molekúl $n = N/V$, upravíme výsledok na tvar pre danú zložku plynu

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{k_B T}} = n_0 e^{-\frac{E_p}{k_B T}}, \quad (4)$$

kde $E_p = \mu gh$.

Z termodynamiky plynu vyplýva, že závislosť koncentrácie od potenciálnej energie (4) v stave termodynamickkej rovnováhy platí všeobecne bez ohľadu na tvar jej závislosti od výšky až po maximum (tzn. v oblasti príťažlivosti). Za hranicou maxima plyn nemôže byť v stave rovnováhy, lebo uniká do Vesmíru.

Potenciálna energia vo výške h_m nad rovníkom je

$$E_p(h_m) = m \left[g_n R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h_m} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 \left[(R+h_m)^2 - R^2 \right] \right] = m \varphi(h_m),$$

kde po dosadení $\varphi(h_m) \approx 48,6 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ je potenciál častice vzhľadom na zemský povrch.

Ak uvažíme dva plyny O_2 a H_2 , je pomer ich koncentrácií vo výške h_m podľa (4)

$$\left(\frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{O}_2}}\right)_{h_m} = \left(\frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{O}_2}}\right)_0 e^{-\frac{\varphi(h_m)(\mu_{\text{H}_2} - \mu_{\text{O}_2})}{k_B T}} = \left(\frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{O}_2}}\right)_0 \times 7,8 \cdot 10^{251},$$

kde $\mu_{\text{O}_2} = 32 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$ a $\mu_{\text{H}_2} = 2 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$, $k_B \approx 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Z výsledku vidno, že ak sa niektoré molekuly vodíka dostanú do únikovej výšky, prakticky žiadna molekula kyslíka túto výšku nedosiahne. Vypočítaný pomer je nepredstaviteľne veľký.

3 body

- c) Stredná kvadratická rýchlosť molekuly vychádza z výsledku štatistickej fyziky, podľa ktorého pripadá na jeden stupeň voľnosti v stave termodynamickej rovnováhy pri teplote T stredná energia $E_1 = (1/2) k_B T$. Postupný pohyb má tri stupne voľnosti (tri nezávislé smery pohybu), preto stredná kinetická energia postupného pohybu molekuly

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} \mu \langle v^2 \rangle = 3 \times \frac{1}{2} k_B T,$$

odkiaľ stredná kvadratická rýchlosť molekuly je

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{\mu}}.$$

Pre jednotlivé molekuly dostaneme $v_{\text{O}_2} \approx 486 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{\text{H}_2} \approx 1,94 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 body

- d) Najprv odhadneme pomer medzi počtom molekúl daného plynu v atmosfére a parciálnym tlakom na povrchu Zeme. Atmosférický tlak (resp. jeho parciálna zložka) zodpovedá tiaži plynu na jednotku plochy zemského povrchu. Podstatná časť atmosféry dosahuje do výšky desiatok km, tzn. do výšky, v ktorej možno považovať tiažové zrýchlenie g za konštantné (nezávislé od výšky). Z pohľadu na Zem je vrstva atmosféry veľmi tenká v porovnaní s polomerom Zeme. Výpočet tlaku je jednoduchý

$$p_0 = \frac{N_{\text{celk}} \mu g}{4\pi R^2},$$

kde N_{celk} je počet molekúl daného plynu v atmosfére.

Pozn.: Len pre zaujímavosť, ak uvážime približnú hodnotu parciálneho tlaku kyslíka na povrchu Zeme $p_0 \approx 20 \text{ kPa}$ (pribl. 20 % atmosférického tlaku), vychádza $N_{\text{celk}} \sim 2 \cdot 10^{43}$, čo je približne $1 \cdot 10^{18} \text{ ton}$.

Koncentrácia molekúl na povrchu Zeme je podľa stavovej rovnice ideálneho plynu

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{p_0}{k_B T}.$$

Vo výške h_m je podľa nášho jednoduchého modelu koncentrácia plynu

$$n(h_m) = n_0 e^{-\frac{\mu \varphi(h_m)}{k_B T}}.$$

Smer pohybu molekúl je náhodný. Uvažujme podľa veľmi zjednodušenej predstavy, že sa polovica molekúl pohybuje rýchlosťou v od Zeme a druhá polovica k Zemi. Hranicou h_m tak prejde za jednotku času polovica molekúl z objemu Sv (objemový prietok), čo predstavuje pri danej koncentrácii počet molekúl

$$\frac{dN}{dt} = S v \frac{n}{2} = 4\pi(R + h_m)^2 v \frac{p_0}{2k_B T} e^{-\frac{m \varphi(h_m)}{k_B T}}.$$

Ak uvažujeme únik iba relatívne malého množstva (1 %), môžeme považovať tok častíc počas úniku za konštantný (v skutočnosti ide o exponenciálny pokles). Čas, za ktorý unikne malá časť molekúl vodíka je

$$\Delta t_{\text{H}_2} = \frac{\Delta N}{N_{\text{celk}}} \frac{R^2}{(R+h_m)^2} \frac{2k_B T}{v_{\text{H}_2} \mu_{\text{H}_2} g} e^{\frac{\mu_{\text{H}_2} \varphi(h_m)}{k_B T}} \approx 1,8 \cdot 10^{15} \text{ s} \approx 58 \text{ mil. rokov}$$

Ak dosadíme hodnoty pre kyslík, dostaneme pre únik 1 % plynu do Vesmíru čas

$$\Delta t_{\text{O}_2} \sim 10^{260} \text{ rokov.}$$

Zem vznikla približne pres 4,3 mld rokov. Proces vzniku kyslíka štiepením vody prebehla pred približne 3 mld rokov. Vypočítaná rýchlosť úniku vodíka do Vesmíru svedčí o tom, že za čas vývoja Zeme podstatná časť vodíka unikla.

Podľa výpočtu kyslík prakticky z atmosféry do Vesmíru neuniká. Súvisí to s tým, že hmotnosť molekuly, a tým aj potenciálna energia kyslíka je 16x väčšia ako vodíka. Exponent funkcie pre Δt je tiež citlivý na teplotu. Vidíme, že schopnosť planét udržať si atmosféru je rôzna. Napr. Merkúr pri menšej hmotnosti a väčšej teplote atmosféru nemá. Podobne si nemôže udržať atmosféru Mesiac.

3 body

Pozn.: Napriek tomu, že použitý model je značne zjednodušený, dáva celkom realistické výsledky a najmä predstavu o podstate prebiehajúcich procesov. V skutočnosti sú pomery v jednotlivostiach zložitejšie, napr. teplota atmosféry vo veľkých výškach je výrazne väčšia a rýchlosť úniku plynov je väčšia. Takto za čas vývoja Zeme vodík unikol prakticky úplne (dnešný obsah vodíka v atmosfére je stopový), nemení to však nič na fakte, že únik kyslíka do atmosféry je taký pomalý, že úbytok touto cestou je nepozorovateľný.

3. Sústava nabitých častíc

Matúš Medo

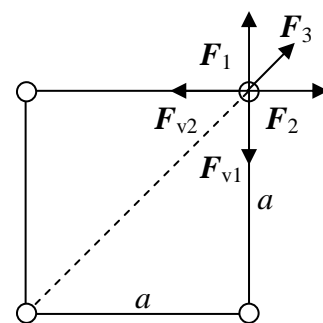
- a) Medzi časticami pôsobia odpudivé sily F_1 , F_2 a F_3 .

Tieto sily sú kompenzované ťahom nití F_{v1} a F_{v2} .

Z podmienky rovnováhy síl vyplýva veľkosť sily F , ktorou je napínaná každá z nití

$$F = F_1 + F_3 \cos 45^\circ = \frac{kQ^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

kde $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$.



3 body

- b) V prípade závesu guľôčok na nite, je poloha určená rovnováhou síl F_1 , F_2 a F_3 elektrickej interakcie, F_g sily tiažovej a F_v sily ťahu nite.

Vo zvislej rovine, ktorá prechádza vrcholom ihlanu a sledovanou guľôčkou vyjadríme rovnováhu horizontálnych zložiek síl a vertikálnych zložiek síl.

Pre horizontálne zložky platí

$$F_v \sin \alpha = F_3 + 2F_1 \cos 45^\circ$$

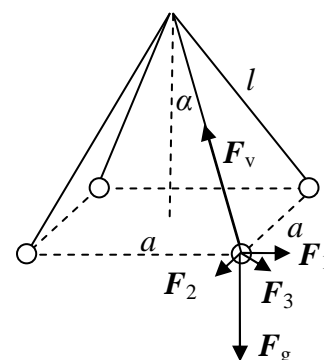
a vo vertikálnom smere

$$F_v \cos \alpha = F_g.$$

Pre uhol medzi hranou a výškou platí

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{2} l} \text{ alebo } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{2l^2 - a^2}}.$$

Z pomeru prvých dvoch rovníc dostaneme



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m g} \frac{k Q^2}{a^2} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right).$$

Ak porovnáme vzťahy pre $\operatorname{tg} \alpha$, dostaneme veľkosť náboja

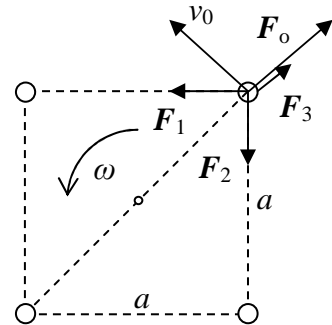
$$Q = \sqrt{\frac{m g}{k} \frac{2 a^3}{\sqrt{2 l^2 - a^2}} \frac{1}{1 + 2 \sqrt{2}}}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- c) Ak sa polarita nábojov strieda, sú sily medzi susednými časticami príťažlivé a sila častíc v uhlopriečke odpudivá. Rovnováha je vytvorená pomocou odstredivej sily pri otáčaní sústavy. Pre rovnováhu síl platí rovnica

$$m \frac{2 v_0^2}{a \sqrt{2}} = \frac{k Q^2}{a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Pre rýchlosť v_0 dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{k Q^2}{m a} \left(1 - \frac{1}{2 \sqrt{2}} \right)}.$$



3 body

4. Elektrické pole kondenzátora

Milan Grendel

Pri riešení úlohy uvažujeme pole v blízkosti platní vo vzdialenosti podstatne menšej ako sú rozmery platní. V takom prípade môžeme elektrické pole považovať za homogénne. Vektor elektrickej intenzity vyvolaný plošne rozloženým nábojom s plošnou hustotou $\sigma = Q/S$ je kolmý na rovinu nabitej plochy (smer od plochy v prípade kladného náboja a opačne v prípade záporného náboja) a má veľkosť $E = \sigma/2\varepsilon$, kde ε je permitivita prostredia.

Druhou významnou vlastnosťou je nulová hodnota elektrickej intenzity vo vodivom prostredí v ustálenom stave.

- a) Pole v sústave je superpozíciou štyroch zložiek od jednotlivých plošných nábojov. V objemoch vodivých platní musí byť pole nulové

$$\frac{Q_{10}}{2\varepsilon S} - \frac{Q'_{10}}{2\varepsilon S} - \frac{Q_{20}}{2\varepsilon S} - \frac{Q'_{20}}{2\varepsilon S} = 0$$

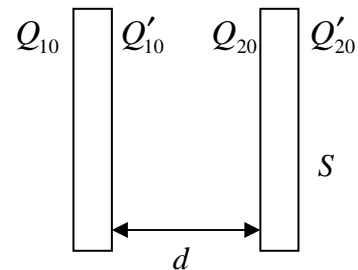
$$\frac{Q_{10}}{2\varepsilon S} + \frac{Q'_{10}}{2\varepsilon S} + \frac{Q_{20}}{2\varepsilon S} - \frac{Q'_{20}}{2\varepsilon S} = 0.$$

Pre náboje na platniach platia vzťahy

$$Q_{10} + Q'_{10} = Q_1 \quad \text{a} \quad Q_{20} + Q'_{20} = Q_2.$$

Z týchto vzťahov dostaneme po úprave

$$Q_{10} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad Q'_{10} = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \quad Q_{20} = \frac{Q_2 - Q_1}{2} \quad Q'_{20} = \frac{Q_2 + Q_1}{2}$$



Číselné výsledky

1) $Q_{10} = 350 \text{ pC}$, $Q'_{10} = 150 \text{ pC}$, $Q_{20} = -150 \text{ pC}$, $Q'_{20} = 350 \text{ pC}$

2) $Q_{10} = 100 \text{ pC}$, $Q'_{10} = 0 \text{ pC}$, $Q_{20} = 0 \text{ pC}$, $Q'_{20} = 100 \text{ pC}$

3) $Q_{10} = -50 \text{ pC}$, $Q'_{10} = -150 \text{ pC}$, $Q_{20} = 150 \text{ pC}$, $Q'_{20} = -50 \text{ pC}$

2 body

b) V priestore medzi platňami je elektrická intenzita $E_0 = \frac{Q_1 - Q_2}{2\epsilon_0 S}$.

Elektrické napätie medzi platňami je $U_0 = E_0 d = \frac{d}{2\epsilon_0 S} (Q_1 - Q_2)$.

Číselne: 1) $U_0 = 17 \text{ V}$, $E_0 = 1,7 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$

2) $U_0 = 0 \text{ V}$, $E_0 = 0 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

3) $U_0 = -17 \text{ V}$, $E_0 = -1,7 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$

2 body

- c) Energia poľa v priestore medzi platňami je rovná súčinu hustoty energie a objemu priestoru

$$E_C = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \right) S d = \frac{1}{8} \frac{d}{\epsilon_0 S} (Q_1 - Q_2)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1 - Q_2}{2} \right) U_0.$$

Číselne: 1) $E_C = 1,3 \text{ nJ}$, 2) $E_C = 0 \text{ J}$ 3) $E_C = 1,3 \text{ nJ}$.

2 body

- d) Ľavá platňa sa nachádza v poli pravej platne. Na nabitý objekt v homogénnom elektrickom poli pôsobí sila $F = QE$. Na ľavú platňu pôsobí sila

$$F_1 = -Q_1 \frac{Q_2}{2\epsilon_0 S}, \text{ podobne } F_2 = Q_2 \frac{Q_1}{2\epsilon_0 S} = -F_1.$$

Sily vzájomného pôsobenia platní sú rovnako veľké a opačného smeru (akcia a reakcia).

Číselne: 1) $F_1 = -0,56 \mu\text{N}$, 2) $F_1 = -56 \text{ nN}$, 3) $F_1 = 113 \text{ nN}$.

2 body

- e) Ak spojíme vodivo platne, premiestni sa elektrický náboj tak, že výsledné napätie medzi platňami je rovné nule $U_1 = 0$. To vedie podľa b) na podmienku $Q_1 = Q_2$.

Podľa výsledkov a) je zrejmé, že na vnútorných povrchoch platní je nulový povrchový náboj a na vonkajších plochách je rovnaký povrchový náboj

$$Q_{11} = Q'_{21} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad Q'_{11} = Q_{21} = 0.$$

1 bod

- f) Navonok pôsobí kondenzátor ako rovinné teleso s celkovým nábojom $Q_1 + Q_2$ bez ohľadu na vnútorné rozdelenie náboja.

Zmena energie je daná zmenou vnútorného rozdelenia náboja a teda zmenou vnútorného poľa v kondenzátore. Keďže pole vo vnútri kondenzátora klesne na nulu, je pokles energie kondenzátora

$$\Delta E_p = -E_C.$$

Pokles energie je rovný teplu, ktoré sa uvoľní v spojovacom vodiči pri vyrovnávaní náboja. Sústava samovoľne zaujme stav s minimálnou potenciálnou energiou.

1 bod

5. Tranzistorový zosilňovač

Ivo Čáp

Pre opis tranzistora ako dvojbrány (vstupná brána, výstupná brána, brána – dvojica svoriek) sa používajú uvedené h – parametre definované rovnicami uvedenými v zadaní. V katalógu sa zvyčajne uvádzajú veľkosti parametrov, ale pre ich použitie je podstatné aj znamienko. Keďže $(-h_{22})$ predstavuje výstupnú vodivosť, ktorá je vždy kladná, musí byť $h_{22} < 0$, v našom prípade teda $h_{22} = -27 \mu\text{S}$.

Z princípu činnosti vyplýva, že pri zvýšení prúdu bázy sa zvýši prúd z kolektora do emitora. Pri označení ΔI_2 ako vystupujúceho to znamená, že pri $\Delta I_1 > 0$ je $\Delta I_2 < 0$ a teda $h_{21} < 0$. V našom prípade je $h_{21} = -300$. Zvyšné parametre sú kladné.

Vstupný obvod predstavuje slučku, v ktorej platí

$$\Delta U_{\text{vst}} = (R_b + h_{11}) \Delta I_1 + h_{12} \Delta U_2 \quad (1)$$

$$\Delta U_1 = h_{11} \Delta I_1 + h_{12} \Delta U_2 \quad (2)$$

Na výstupnej strane platí pre prúd

$$h_{21} \Delta I_1 = \left(\frac{1}{R_k} - h_{22} \right) \Delta U_2 \quad (3)$$

a
$$\Delta U_2 = R_k \Delta I_2. \quad (4)$$

a) Ak vyjadríme prúd ΔI_1 z (3) a dosadíme do (1), dostaneme

$$A_U = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_{\text{vst}}} = - \frac{|h_{21}|}{(R_b + h_{11}) \left(\frac{1}{R_k} + |h_{22}| \right) - h_{12} |h_{21}|} \approx -0,28. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

Záporné zosilnenie znamená, že zosilňovač prevracia fázu na opačnú.

Pozn.: Ak napätové zosilnenie vzťahujeme k vnútornému napätiu zdroja signálu, je pre $R_b > h_{11}$ významne ovplyvnené vnútorným odporom zdroja.

b) Pre určenie prúdového zosilnenia použijeme definičnú rovnicu pre h – parametre

$$\Delta I_2 = h_{21} \Delta I_1 + h_{22} \Delta U_2.$$

Po dosadení (4) dostaneme

$$A_I = \frac{\Delta I_2}{\Delta I_1} = - \frac{|h_{21}|}{1 + |h_{22}| R_k} \approx -300. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Pri označení veličín podľa obrázku zosilňovač mení fázu prúdu na opačnú.

Z uvedených výsledkov vidno, že pre dané odpory zdroja a záťaže zosilňovač funguje ako zosilňovač prúdu. S narastaním R_k zosilnenie klesá.

Pozn.: Pre zdroj s nízkym vnútorným odporom $R_b = 1 \text{ k}\Omega$ a výstupným odporom $R_k = 10 \text{ k}\Omega$ dostaneme po dosadení $A_U \approx 516$ a $A_I \approx 236$. V takom prípade ide o zosilňovač prúdu aj napätia, a teda aj výkonu.

c) Ak napätie ΔU_2 z (3) dosadíme do (2), dostaneme pre vstupný odpor

$$R_{\text{vst}} = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = h_{11} - \frac{h_{12} |h_{21}|}{1 + |h_{22}| R_k} R_k \approx 4,0 \text{ k}\Omega.$$

Pre nízky odpor záťaže je $R_{\text{vst}} \approx h_{11}$. Pre prípad $R_k = 10 \text{ k}\Omega$ je $R_{\text{vst}} \approx 3,6 \text{ k}\Omega$ a s narastaním R_k ďalej klesá (vzhľadom na $h_{21} < 0$). $\mathbf{3 \text{ body}}$

6. Voľný pád s odporom vzduchu

Ivo Čáp

- a) V prípade voľného pádu bez odporu vzduchu by nadobudla kvapka rýchlosť

$$v = \sqrt{2gh} \approx 140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Kinetická energia pred dopadom by bola v takom prípade

$$E_k = mgh = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_v gh \approx 0,64 \text{ J}.$$

($\rho_v = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ hustota vody)

Kinetická energia strely je

$$E_{ks} = \frac{1}{2} m_s v_s^2 \approx 12 \text{ J}.$$

Pomer je $E_k/E_{ks} \approx 5,3 \%$.

Kinetická energia je približne 1/20 kinetickej energie strely, čo je príliš vysoká hodnota. V takom prípade by bolo nebezpečné vychádzať na dážď.

2 body

- b) V prípade odporu vzduchu je zrýchlenie kvapky určené rozdielom tiažovej a odporovej sily $F = F_g - F_o$. Vztlaková sila vzduchu je veľmi malá oproti tiažovej a preto sa zanedbáva. Odporová sila narastá s rastom rýchlosti až nastane rovnováha, spojená s rovnomerným pádom kvapky. V stave rovnováhy (nulového zrýchlenia) platí

$$mg = (1/2) \rho c_{xg} \pi (d/2)^2 v_m^2.$$

S použitím stavovej rovnice určíme hustotu vzduchu

$$\rho = \frac{p M_m}{RT},$$

kde $R = 8,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, $M_m = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Ustálená rýchlosť je potom

$$v_m = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_v g d}{c_{xg}} \frac{RT}{p M_m}} \approx 10,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (1)$$

Pomer hodnôt nadobudnutej rýchlosti je $k \approx 7,5 \%$.

Odpor vzduchu pád kvapky výrazne utlmí.

2 body

- c) Pre pád parašutistu s neotvoreným padákom použijeme za daných zjednodušení vzťah (1), pričom priemer gule je

$$d_p = \sqrt[3]{\frac{6m_p}{\pi\rho_p}} \approx 57,6 \text{ cm}.$$

Ustálená rýchlosť pádu je potom $v_{m1} \approx 112 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pri riešení pádu numerickou metódou vychádzame zo známej závislosti pôsobiacej sily od rýchlosti a z toho vyplývajúceho zrýchlenia

$$a = F/m = g - k_1^* v^2,$$

kde $k_1^* = (k_1/m) = (1/2) \rho c_{xg} \pi (d_p/2)^2 / m \approx 7,77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

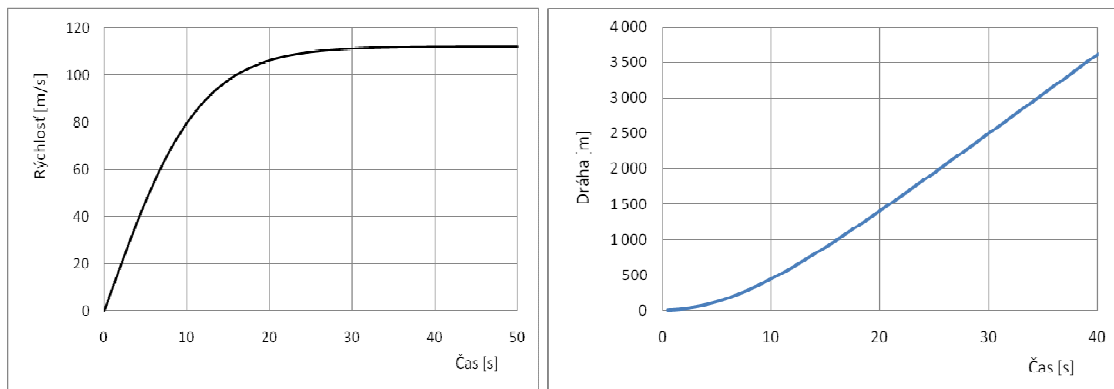
Pre tieto hodnoty spresníme $v_{m1} = 112,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pričom hodnota pre x_1 je $v_1 = 0,99 v_{m1} \approx 111,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vychádzame z počiatočnej rýchlosti $v = 0$ a postupne po krátkych intervaloch Δt pridávame prírastky $\Delta v = a(t) \Delta t$. Tak dostávame postupne hodnoty rýchlosti zodpovedajúce narastajúcemu času $t = n \Delta t$.

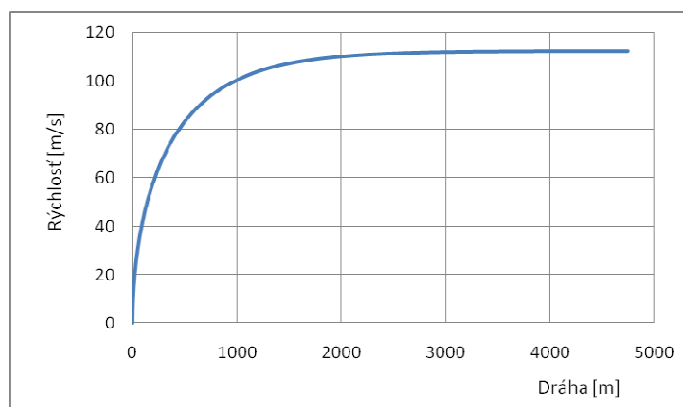
Keby sme uvažovali počiatočné zrýchlenie g , nadobudol by parašutista rýchlosť v_{m1} za čas $t_{m1} = v_{m1}/g \approx 11 \text{ s}$. Numerická metóda zjednodušuje pohyb v rámci intervalu Δt na rovnomerne zrýchlený (konštantné zrýchlenie). Čas musí byť preto dostatočne krátky, v našom prípade $\Delta t \ll t_{m1}$. Interval preto volíme $\Delta t < 1 \text{ s}$ (čím menší, tým je výpočet presnejší, ale časovo náročnejší). Vhodné je algoritmus naprogramovať a riešiť s použitím počítača (je možné riešiť aj „ručne“ s kalkulačkou, ale taký postup je veľmi zdĺhavý pre kratšie Δt – tento postup možno použiť pre odhad pre väčšie Δt).

Podobne z určených hodnôt rýchlosti určíme dráhu. K dráhe $x(t_n)$ v čase t_n pridáme prírastok v nasledujúcom intervale, ktorý určíme ako dráhu za čas Δt s priemernou rýchlosťou $0,5 * [v(t_n) + v(t_{n+1})]$.

S použitím jednoduchého prostriedku – tabuľkového kalkulátoru EXCEL možno získať záznam riešenia podľa nasledujúcich grafov (spolu s tabuľkou hodnôt).



Závislosť rýchlosti od dráhy je v nasledujúcom grafe



V tabuľke určíme čas, ktorý zodpovedá hodnote rýchlosti $v_1 = 0,99 v_{m1} = 111,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Zodpovedajúci čas je približne $t_1 \approx 30 \text{ s}$. Za tento čas by parašutista urazil dráhu približne 2,5 km. Uvedenú rýchlosť počas pádu z výšky zoskoku 2 km parašutista nedosiahne. Bez

otvorenia padáku by za daných podmienok parašutista dopadol na zem za 25 s rýchlosťou $110 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4 body

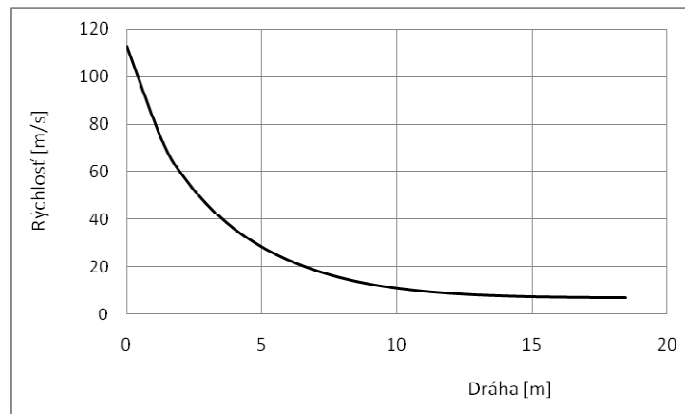
- d) Ak predpokladáme otvorenie padáku pri rýchlosti v_{m1} , nasleduje spomalenie účinkom sily $F = m g - k_2 v^2$ a so zodpovedajúcim zrýchlením

$$a_2 = g - k_2^* v^2,$$

kde $k_2^* = (k_2/m) = (1/2) \rho c_{xpg} \pi (D/2)^2 /m \approx 0,2192 \text{ m}^{-1}$.

Zodpovedajúca rýchlosť ustáleného pohybu je $v_{m2} = 6,69 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Závislosť rýchlosti od dráhy je v nasledujúcom grafe.



V tomto teoretickom prípade vidno, že pri otvorení padáku poklesne rýchlosť na hodnotu 10 m/s približne za $0,5 \text{ s}$ po prekonaní dráhy približne $10,5 \text{ m}$. Z tohto výsledku by vyplývalo, že parašutisti by stačilo otvoriť padák 10 m nad zemou, aby dostatočne zmiernil rýchlosť dopadu.

V skutočnosti je dôležitá prechodná časť, kedy sa padák otvára (kým sa plne rozvinie). Tento proces trvá určitý čas, za ktorý parašutista urazí niekoľko sto metrov. Keby sa pri rýchlosti 110 m/s okamžite rozvinul padák, znamenalo by to v prvom okamihu zrýchlenie $a \approx 280 g$, čo by parašutista neprežil a ani povrazy padáka by taký ťah nevydržali. Pri postupnom otváraní padáka sa rýchlosť mení tak, že zrýchlenie zostáva v prijateľných medziach.

4 body