Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória B

Riešenie úloh krajského kola

Riešenia nájdete na http://fpv.uniza.sk/fo a www.olympiady.sk

1. Hod na šikmú plochu *Ľubomír Konrád*

Riešenie:

a) Pri pohybe kameňa ide o šikmý vrh opísaný rovnicami

$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = v_0\, t \sin\alpha - (1/2)\, g\, t^2$

Pre $y = 0$ dostaneme čas dopadu

$t_d = (2\, v_0 \sin\alpha)/\, g$

a vzdialenosť bodu dopadu

$$D = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Pre uhol α_m a zodpovedajúcu vzdialenosť D_m dostaneme rýchlosť vrhu

$$v_0 = \sqrt{\frac{D_m g}{2\sin\alpha_m \cos\alpha_m}} \approx 15{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$ **3 body**

b) Ak hádže chlapec kameň na šikmú plochu, je bod dopadu daný súradnicami

$y_d = d\sin\varphi = v_0\, t_d \sin\alpha - (1/2)\, g\, t_d^{\,2}$

a $x_d = d\cos\varphi = v_0\, t_d \cos\alpha$.

Čas dopadu je

$$t_d = \frac{d\cos\varphi}{v_0\cos\alpha}$$

a súradnica

$$y_d = d\sin\varphi = \sin\alpha\frac{d\cos\varphi}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{d\cos\varphi}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$$

odkiaľ dostaneme vzdialenosť

$$d_1 = \frac{2v_0^2}{g}\left[\frac{\sin(\alpha_m - \varphi)\cos\alpha_m}{\cos^2\varphi}\right] = D_m\left[\frac{\sin(\alpha_m-\varphi)}{\sin\alpha_m\cos^2\varphi}\right] \approx 18{,}9\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

c) Existuje viacero spôsobov, ako určiť maximálnu výšku bodu dopadu. Hľadáme uhol α_0, pre ktorý je výška y_d maximálna. Hľadáme maximum výrazu

Pre daný sklon φ zodpovedá maximum h maximu vzdialenosti d, ktorú dostaneme zo vzťahu pre y_d.

$$d = \frac{2v_0^2}{g\cos\varphi}(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\varphi)\cos^2\alpha = \frac{2v_0^2}{g\cos\varphi}\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\ .$$

Ak označíme za premennú veličinu $z = \mathrm{tg}\,\alpha$, hľadáme maximum výrazu

$$d = \frac{2v_0^2}{g\cos\varphi}\,\frac{z - \mathrm{tg}\,\varphi}{1+z^2}\ .$$

Maximum výrazu sa získa z podmienky nulovej derivácie podľa premennej z

$$d' = \frac{2v_0^2}{g\cos\varphi}\left(\frac{z-\mathrm{tg}\,\varphi}{1+z^2}\right)' = \frac{2v_0^2}{g\cos\varphi}\,\frac{1+z^2-(z-\mathrm{tg}\,\varphi)2z}{\left(1+z^2\right)^2} = 0\,,$$

odkiaľ dostaneme podmienku

$$z^2 - 2\,\mathrm{tg}\,\varphi\, z - 1 = 0\,,$$

a odkiaľ

$$z = \mathrm{tg}\,\alpha_0 = \mathrm{tg}\,\varphi \pm \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi + 1}$$ (význam má znamienko + pre $z > 0$).

Pre optimálny uhol vrhu dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \mathrm{tg}\,\varphi + \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi + 1}\,, \quad \alpha_0 \approx 52{,}5°$$ **2 body**

Maximálna výška dopadu je potom

$$h_\mathrm{m} = d \sin\varphi = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi + 1}}{1 + \left(\mathrm{tg}\,\varphi + \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi + 1}\right)^2} = \frac{v_0^2}{g}\,\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi + \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}}$$

a po úprave

$$h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{g}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + 1} \approx 5{,}1 \text{ m.}$$ **2 body**

2. Kmity piestu *Ľubomír Konrád*

a) Na piest pôsobia sily pružín a tlakové sily plynu z obidvoch strán. V rovnovážnom stave je výslednica týchto síl nulová. Po vychýlení z rovnovážnej polohy o x je výslednica síl pružín $F_k = -2kx$. Plyn opisuje stavová rovnica $pV = nRT$. Ak považujeme dej za izotermický, dôjde pri zmene objemu plynu o $\Delta V = \pm S x$ k zmene tlaku $\pm\Delta p$, pričom platí

$$p_1 V_1 = (p + \Delta p)(V - \Delta V) = nRT$$

$$p_2 V_2 = (p - \Delta p)(V + \Delta V) = nRT.$$

Výsledná tlaková sila, ktorá pôsobí na piest je

$$F_p = S(p_2 - p_1) = nRTS\left(\frac{1}{V+Sx} - \frac{1}{V-Sx}\right) = -\frac{nRT}{V^2}\frac{2S^2x}{1-\left(\frac{S}{V}x\right)^2}.$$ **2 body**

Ak je $x \ll \frac{V}{S}$, možno druhý člen v menovateli zanedbať v porovnaní s jednotkou a dostaneme lineárny vzťah pre tlakovú silu $F_p = -\frac{2nRTS^2}{V^2}x$. **1 bod**

Výslednú silu vyjadríme lineárnym vzťahom $F = -\left(2k + \frac{2nRTS^2}{V^2}\right)x = -Kx.$

Konštanta úmernosti je $K = 2k + \frac{2pS^2}{V} \approx 110\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. **1 bod**

b) Hmotnosť plynu vo valci je $m_p = nM_m = \frac{2pV}{RT}M_m \approx 149\ \mathrm{mg}$ **1 bod**

a hustota plynu $\rho_p = \frac{2pM_m}{RT} \approx 74\ \mathrm{g \cdot m^{-3}}$. **1 bod**

c) V prípade výslednej sily priamo úmernej výchylke vykonáva teleso kmitavý pohyb s harmonickou časovou závislosťou s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k + \frac{2pS}{V}}} \approx 0{,}46\ \mathrm{s}$$ **2 body**

d) Maximálnu rýchlosť dosahuje piest pri prechode rovnovážnou polohou a jej veľkosť je

$$v_{max} = \omega x_m = \sqrt{\frac{2k + \frac{2pS^2}{V}}{m}}\, d \approx 0{,}20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ **2 body**

e) Pri pohybe vyvoláva piest zotrvačnú silu F_z, ktorá sa prenáša prostredníctvom pružín a plynu na valec. Túto silu kompenzuje sila trenia s podložkou. Pre maximálnu veľkosť tejto sily dostaneme

$$F_{Tmax} = m a_{max} = m\omega^2 x_{max} = 2\left(k + \frac{pS^2}{V}\right)d \approx 1{,}65\ \mathrm{N}.$$ **1 bod**

3. Vzduch v atmosfére *Ivo Čáp*

Riešenie:

a) Pri určení hustoty vychádzame zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p\,V = n\,R\,T = \frac{m}{M_{\mathrm{m}}}\,R\,T,$$

odkiaľ dostaneme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\,M_{\mathrm{m}}}{R\,T}$$, pre h = 0 dostaneme $\rho \approx$ 1,2 kg·m^{-3}. **2 body**

b) Pokles tlaku pri malom výškovom rozdiele je

$$\Delta p \approx -\rho\,g\,\Delta h \approx -1{,}17\ \mathrm{kPa}$$ **2 body**

c) S použitím údajov pilota dostaneme

$$\Delta T_1 = \frac{T_{\mathrm{L}} - T_0}{h_{\mathrm{L}}}\,\Delta h_1 \approx -0{,}71\ {}^\circ\mathrm{C}$$ **1 bod**

S použitím všeobecnej stavovej rovnice dostaneme

$$p\,V^{k} = p\left(\frac{nRT}{p}\right)^{k} = p_0\left(\frac{nRT_0}{p_0}\right)^{k},$$

odkiaľ dostaneme

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$ **1 bod**

Pre zmenu dostaneme

$$\Delta T = T_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = T_0\left[\left(\frac{p_0 + \Delta p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = T_0\left[\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right].$$

Pre malú relatívnu zmenu $\Delta p/p_0 << 1$ použijeme približný vzťah

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \approx 1 + \frac{k-1}{k}\,\frac{\Delta p}{p_0}$$

a po dosadení naspäť

$$\Delta T \approx \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{\Delta p}{p_0}\,T_0\ .$$

Pre hodnoty pri povrchu zeme dostaneme

$$k \approx \left(1 - \frac{\Delta T_1}{T_0}\,\frac{p_0}{\Delta p_1}\right)^{-1} \approx 1{,}26.$$ **2 body**

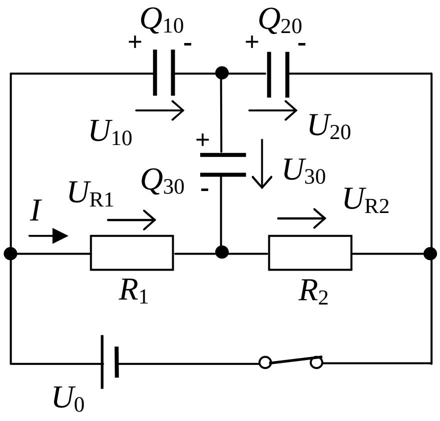
d) Pre určene tlaku použijeme upravenú stavovú rovnicu

$$p_{\mathrm{L}} = p_0\left(\frac{T_{\mathrm{L}}}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \approx 24\ \mathrm{kPa}$$, resp. $p_{\mathrm{L}}/p_0 \approx$ 24 %. **2 body**

Vo výške letu je tlak rovný približne ¼ atmosférického tlaku pri zemi.

4. Kondenzátory *Ľubomír Konrád*

<u>*Riešenie:*</u>



a) V ustálenom stave je prúd kondenzátorov nulový, preto cez obidva rezistory prechádza rovnaký prúd $I = U_0/(R_1 + R_2)$.
Podľa 2. Kirchhoffovho zákona platia pre jednotlivé slučky s kondenzátormi rovnice

$$U_{10} + U_{30} - R_1 I = 0$$
$$U_{20} - U_{30} - R_2 I = 0.$$

V uzle, v ktorom sa stretávajú tri kondenzátory, je nulový náboj a preto platí

$$-Q_{10} + Q_{20} + Q_{30} = 0.$$

Keďže majú kondenzátory rovnaké kapacity, pričom $Q = C\,U$, má predchádzajúca rovnica tvar

$$-U_{10} + U_{20} + U_{30} = 0.$$

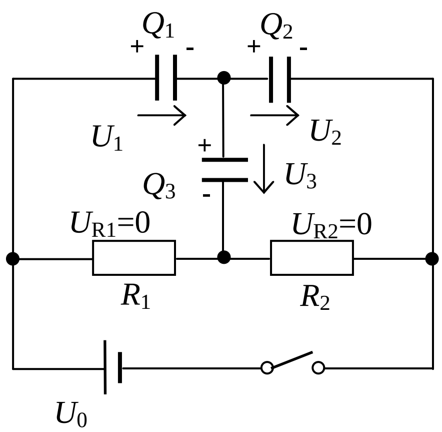
Z uvedených rovníc dostaneme po úprave

$$U_{10} = \frac{1}{3}(R_2 + 2R_1)\,I = U_0\,\frac{R_2 + 2R_1}{3\,(R_1 + R_2)},$$

$$U_{20} = \frac{1}{3}(R_1 + 2R_2)\,I = U_0\,\frac{R_1 + 2R_2}{3\,(R_1 + R_2)}$$

$$U_{30} = U_0\,\frac{R_1 - R_2}{3\,(R_1 + R_2)}.$$

3 x 2 body



b) Po vypnutí spínača (odpojení zdroja) sa ustáli stav, v ktorom je prúd rezistorov nulový. Pre napätia $U_{R1} = 0$ a $U_{R2} = 0$, čo zodpovedá stavu pred zopnutím spínača – teda stavu vybitých kondenzátorov $Q_i = 0$. **2 body**

c) V stave 1 je energia sústavy

$$E_{C0} = \frac{1}{2}C\,(U_{10}^2 + U_{20}^2 + U_{30}^2)$$

V stave 2 je energia sústavy nulová.
Pri prechode medzi stavmi 1 a 2 sa celá energia nabitých kondenzátorov uvoľní vo forme tepla na rezistoroch. Teplo uvoľnené v rezistoroch je

$$W_Q = E_{C0} = \frac{(R_2^2 + R_1^2 + R_1 R_2)}{3\,(R_1 + R_2)^2}\,C\,U_0^2.$$

2 body

---

50. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*
Autori úloh: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakcia: Ivo Čáp

Vydanie publikácie je hradené z dotácie Ministerstva školstva SR prostredníctvom IUVENTY v Bratislave