Fyzikálna olympiáda

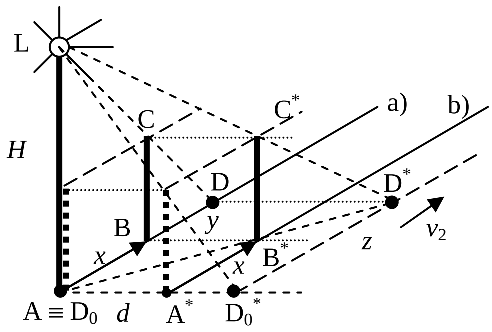
50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória C

Riešenie úloh domáceho kola

1. ***Pohyb tieňa*** *Ľubomír Mucha*



a) Keď sa postava nachádza vo vzdialenosti x, nachádza sa tieň D hlavy C vo vzdialenosti y od päty A, pre ktorú platí $(H - h)/x = h/(y - x)$, odkiaľ dostaneme súradnicu

$$y = x + \frac{h}{H-h}\,x = \frac{H}{H-h}\,x\,.$$

Keďže zmeny obidvoch súradníc sú priamo úmerné, potom i zodpovedajúce rýchlosti $v = \Delta x/\Delta t$ a $v_1 = \Delta y/\Delta t$ sú v tom istom pomere

$$v_1 = \frac{H}{H-h}\,v \;\approx\; 3{,}75\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \quad (1)$$ **4 body**

b) V druhom prípade je tieň znázornený bodom D*. Tieň sa pohybuje po priamke z rovnakou rýchlosťou ako tieň D bez ohľadu na vzdialenosť d, ako vidno z obrázku.

$v_2 = v_1 \approx 3{,}75\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **4 body**

c) Ak je zdroj ďaleko (pre Slnko je $H >> h$ a teda podľa (1) $v_3 \approx v$), má lúč premietajúci hlavu stále rovnaký smer, preto sa tieň hlavy pohybuje s rovnakou rýchlosťou ako rýchlosť pohybu postavy $v_3 = v = 1{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. **2 body**

2. ***Delo na kopci*** *Ľubomír Konrád*

a) Pre prvý vodorovný vrh platia pri zanedbaní odporu vzduchu vzťahy

$x_1 = v_1\, t \qquad\qquad y_1 = -(1/2)\, g\, t^2$

Pre druhý projektil

$x_2 = v_2\,(t - \Delta t)\cos\alpha \qquad\qquad y_2 = v_2\,(t - \Delta t)\sin\alpha - (1/2)\, g\,(t - \Delta t)^2.$

Podmienka súčasného dopadu do rovnakého miesta má tvar

$t = t_\mathrm{d}:\ y_1 = y_2 = -h,\ x_1 = x_2 = d.$

$$d = v_2\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)\cos\alpha \qquad (1)$$
$$d = v_1\, t_\mathrm{d} \qquad (2)$$
$$-h = -(1/2)\, g\, t_\mathrm{d}^2 \qquad (3)$$
$$-h = v_2\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)\sin\alpha - (1/2)\, g\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)^2. \qquad (4)$$

Z rovnice (3) určíme čas letu t_d prvého projektilu

$$t_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 11{,}1\ \mathrm{s} \qquad (5)$$

rovnice (1) – (2) a (4) zapíšeme v tvare

$v_2\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)\cos\alpha = v_1\, t_\mathrm{d}$

$v_2\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)\sin\alpha = -h + (1/2)\, g\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)^2.$

Ich pomerom vylúčime v_2 a vyjadríme uhol výstrelu

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{g\,(t_\mathrm{d} - \Delta t)^2 - 2h}{2 v_1 t_\mathrm{d}} \approx -42{,}8\cdot 10^{-3}, \qquad \alpha \approx -2{,}45°.$$ **4 body**

Rýchlosť výstrelu je

$$v_2 = \frac{v_1 t_\mathrm{d}}{(t_\mathrm{d} - \Delta t)\cos\alpha} = \frac{v_1 t_\mathrm{d}}{(t_\mathrm{d} - \Delta t)}\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} \approx 1{,}18\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}.$$ **4 body**

b) Po dosadení do rovnice (2) dostaneme vzdialenosť

$d = v_1\, t_\mathrm{d} \approx 8{,}30\ \mathrm{km}.$ **2 body**

3. ***Kúsok ľadu*** *Ľubomír Mucha*

a) Ak po vložení do kalorimetra teleso pláva, je hmotnosť telesa rovnaká ako hmotnosť vytlačenej kvapaliny. Preto hmotnosť vody po vložení telesa je $m_v{}^* = m_v - m_1$. Pre vyrovnávanie teploty platí kalorimetrická rovnica

$$m_v^* c_v (t_v - t_k) = m_O c_O (t_k - t_1) + m_L [c_L (t_0 - t_1) + l + c_v (t_k - t_0)].$$

Ľad sa najprv zohreje na teplotu topenia t_0, roztopí sa a potom sa vzniknutá voda zohreje na výslednú teplotu.

Z tejto rovnice a vzťahu $m_1 = m_O + m_L$ dostaneme hmotnosť olova

$$m_O = \frac{(m_v - m_1) c_v (t_v - t_k) - m_1 [c_L (t_0 - t_1) + l + c_v (t_k - t_0)]}{c_O (t_k - t_1) - c_L (t_0 - t_1) - l - c_v (t_k - t_0)} \approx 18 \text{ g}.$$ **3 body**

Hmotnosť ľadu v telese je

$m_L = m_1 - m_O \approx 182$ g **2 body**

b) Objemový podiel je

$$p = \frac{V_O}{V_O + V_L} = \frac{\rho_L m_O}{\rho_L m_O + \rho_O m_L} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-3}.$$ **2 body**

c) Teleso sa celé ponorí, ak je jeho objemová hmotnosť (priemerná hustota) väčšia ako hustota vody

$$\frac{m}{V} = \frac{m_1}{\dfrac{m_{O1}}{\rho_O} + \dfrac{m_1 - m_{O1}}{\rho_L}} \geq \rho_v$$

odkiaľ dostaneme $m_{O1} \geq m_1 \dfrac{\rho_O}{\rho_v} \dfrac{\rho_v - \rho_L}{\rho_O - \rho_L} \approx 22$ g. **3 body**

4. ***Pád guľôčky v kvapaline*** *Ľubomír Konrád*

Keď sa pohybuje guľôčka v kvapaline, pôsobí na ňu okrem sily tiažovej a vztlakovej aj odporová sila kvapaliny. V prípade rovnomerného pohybu sú sily v rovnováhe

$$m g - \frac{m}{\rho} \rho_0 g = k v_1^2 ,$$

kde ρ_0 je hustota kvapaliny a ρ je hustota guľôčky. Čas pohybu do hĺbky h je

$$t_0 = \frac{h}{v_1} = \frac{h}{\sqrt{\dfrac{m g}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}} .$$ **4 body**

V prípade pohybu nádoby s konštantným zrýchlením a vo vodorovnom smere sa k sile tiažovej vektorovo pripočítava zotrvačná sila. V neinerciálnej sústave nádoby tak vzniká efektívne tiažové pole s intenzitou veľkosti g^* a so sklonom α voči zvislému smeru, pre ktoré platí $g^* = \sqrt{g^2 + a^2}$ a $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{g}$.

V tomto poli sa guľôčka pohybuje rovnomerne v smere poľa šikmo ku dnu, pričom prekoná dráhu $l = h / \cos\alpha$. Čas pohybu je

$$t_1 = \frac{l}{v_2} = \frac{h / \cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{m g^*}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}} = \frac{1}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{g^*}}\, t_0 = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\, \sqrt{\frac{g}{g^*}}\, t_0 .$$

Po dosadení $t_1 = \sqrt[4]{1 + \dfrac{a^2}{g^2}}\; t_0 .$ **6 bodov**

5. ***Práca plynu*** *Ľubomír Konrád*

Práca plynu je určená obsahom trojuholníka 1-2-3

$$W = \frac{1}{2}(V_3 - V_1)(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} p_1 V_1 \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right).$$

Podľa zadania platí

$$V_3 - V_1 = 2\,(V_2 - V_1),$$

odkiaľ s použitím stavovej rovnice dostaneme

$$\frac{V_3}{V_1} + 1 = 2\,\frac{V_2}{V_1} \quad \text{a ďalej} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{c+1}{2}.$$

Z izobarického deja 3-1 dostaneme

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1} = c$$

Pre dej 1-2 platí

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

a teda $\dfrac{p_2}{p_1} = c\,\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2c}{c+1}$.

Práca plynu je potom

$$W = \frac{1}{2} R T_1 \frac{(c-1)^2}{c+1}$$ **8 bodov**

a pre dané $c = 3$

$$W = \frac{1}{2} R T_1 .$$ **2 body**

6. ***Elektrická schéma*** *Ľubomír Mucha*

Pri riešení použijeme Kirchhoffove zákony a Ohmov zákon.

a) V zapojení podľa obr. C-3 prechádza obvodom (a teda aj ampérmetrom) prúd I_1 a pre napätie na sústave paralelne zapojených prvkov s odpormi R_1 a R_V

$$I_1 = \frac{U_\mathrm{R1}}{R_1 R_\mathrm{V}}(R_1 + R_\mathrm{V}) \approx 1{,}33 \text{ mA.}$$ **3 body**

b) Napätie zdroja je

$$U_0 = I_1\left(\frac{R_1 R_\mathrm{V}}{R_1 + R_\mathrm{V}} + R_2 + R_\mathrm{A}\right) = \left[1 + \frac{(R_2 + R_\mathrm{A})(R_1 + R_\mathrm{V})}{R_1 R_\mathrm{V}}\right] U_\mathrm{R1} \approx 36{,}7 \text{ V.}$$

3 body

c) Pri pripojení voltmetra paralelne k rezistoru R_2 je prúd obvodu

$$I_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_\mathrm{A} + \dfrac{R_2 R_\mathrm{V}}{R_2 + R_\mathrm{V}}} \approx 1{,}67 \text{ mA}$$ **2 body**

a napätie na sústave paralelne zapojených prvkov s odpormi R_2 a R_V je

$$U_\mathrm{R2} = I_2 \frac{R_2 R_\mathrm{V}}{R_2 + R_\mathrm{V}} \approx 20{,}0 \text{ V.}$$ **2 body**

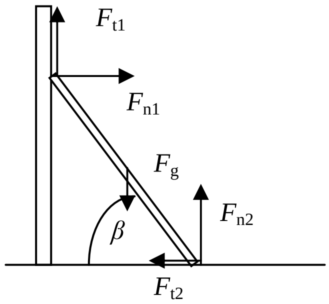
7. Súčiniteľ trenia - experimentálna úloha

Ľubomír Mucha

Odvodenie:

a) Sila trenia je v prvom prípade $F_t = f_1 F_n$, kde $F_n = mg \cos\alpha$. Pohyb nastane, keď pohybová zložka tiažovej sily dosiahne veľkosť sily trenia $mg \sin\alpha_1 = f_1 mg \cos\alpha_1$, odkiaľ dostaneme prvý vzťah $f_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$.

b) V šikmej polohe pôsobia na pravítko sily podľa obrázku. Pri hraničnom uhle β_1 (hranica kĺzania) platia vzťahy pre sily trenia $F_{t1} = f_1 F_{n1}$ a $F_{t2} = f_2 F_{n2}$.



Podmienky rovnováhy sú

$F_{t2} = F_{n1}$ vodorovná zložka sily

$F_g = F_{t1} + F_{n2}$ zvislá zložka sily

$F_{t1}\, l \cos\beta_1 + F_{n1}\, l \sin\beta_1 = F_g\, (l/2) \cos\beta_1$ momentová.

Postupným vylučovaním jednotlivých veličín a s použitím výsledku časti a) dokážeme hľadaný vzťah.