Fyzikálna olympiáda

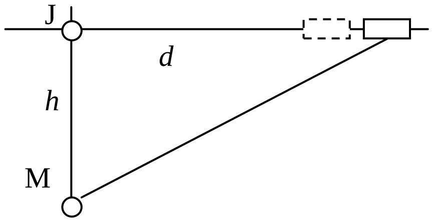
50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória D

Riešenie úloh domáceho kola

1. Húkajúci vlak



a) V počiatočnom okamihu signálu je vzdialenosť vlaku od Janka d_1 a túto vzdialenosť zvuk prekoná za čas $t_{Aa} = d/c$. Počas trvania signálu vlak urazí vzdialenosť $\Delta d = v\, t_0$. Ukončenie signálu sa preto dostane k Jankovi za čas $t_{Ba} = (d - \Delta d)/c < t_{Aa}$.
Janko určí čas trvania signálu

$$t_1 = t_0 - (t_{Aa} - t_{Ba}) = t_0\,(1 - v/c) \approx 4{,}71 \text{ s.}$$

5 bodov

b) Pre Marienku je počiatočná vzdialenosť vlaku $l_A = \sqrt{d^2 + h^2}$. Začiatok signálu k nej dorazí za čas $t_{Ab} = l_A/c$. V čase ukončenia signálu je vlak vo vzdialenosti od Marienky $l_B = \sqrt{(d - \Delta d)^2 + h^2}$ a koniec signálu k nej dôjde za čas $t_{Bb} = l_B/c$.
Marienka určí čas trvania signálu

$$t_2 = t_0 - \left(\sqrt{d^2 + h^2} - \sqrt{(d - v t_0)^2 + h^2}\right)/c \approx 4{,}74 \text{ s.}$$

5 bodov

V obidvoch prípadoch sa čas trvania signálu skracuje pre pozorovateľa, voči ktorému sa jeho zdroj pohybuje. Pre skrátenie je určujúce priblíženie vlaku k pozorovateľovi počas vysielania signálu. Keby vlak húkal v čase, keď prechádza cez priecestie (pohyboval by sa kolmo k spojnici s Marienkou), jeho vzdialenosť od Marienky by sa prakticky nemenila a preto by Marienka skrátenie signálu nepozorovala. Keby sa vlak od pozorovateľov vzďaľoval, pozorovaná dĺžka signálu by sa naopak zväčšovala oproti času t_0.

2. Hod kameňom

a) Ak hodíme guľôčku zvislo nahor rýchlosťou v_0, ide o pohyb rovnomerne spomalený so zrýchlením $-g$. Pre časovú závislosť rýchlosti a výšky nad hladinou vody platia vzťahy

$$v = v_0 - g\,t \qquad h = H + v_0\,t - (1/2)\,g\,t^2.$$

Maximálna výška zodpovedá podmienke $v = 0$, pre ktorú dostaneme výšku

$$h_m = H + \frac{v_0^2}{2g} \approx 21{,}5 \text{ m.}$$

2 body

b) Kamienok sa pohybuje vo vzduchu až kým dopadne na hladinu vody $h = 0$. Z tejto podmienky dostaneme pre čas pohybu rovnicu

$$(1/2)\,g\,t^2 - v_0\,t - H = 0,$$

ktorej riešenie je

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}\,.$$

Fyzikálny zmysel má iba riešenie $t > 0$, tzn. znamienko +.

Čas letu je $t_p = \dfrac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2 + \dfrac{2H}{g}} \approx 3{,}62$ s.

2 body

c) Pri zanedbateľnom vplyve odporu vzduchu môžeme rýchlosť dopadu určiť zo vzťahu pre rýchlosť pohybu a čas letu

$$v_d = v_0 - g\,t_d = -\sqrt{v_0^2 + 2gH} \approx -20{,}5 \text{ m·s}^{-1}.$$

1 bod

Znamienko (–) znamená opačný smer rýchlosti voči smeru počiatočnej rýchlosti smerom nahor.

Pri pohybe vo vzduchu pôsobí na teleso aerodynamický odpor vyjadrený Newtonovým vzťahom

$$F_\mathrm{o} = (1/2)\, \rho_0\, c_x\, S_x\, v^2,$$

kde ρ_0 je hustota prostredia (vzduchu), c_x koeficient aerodynamického odporu, S_x obsah plochy kolmého priemetu telesa do roviny kolmej na smer pohybu a v okamžitá hodnota rýchlosti.
Pre teleso tvaru gule je $c_x = 0{,}47$ a pre vzduch na normálnych podmienok nájdeme v tabuľkách hustotu $\rho_0 = 1{,}2\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

d) Tiažová sila je $F_\mathrm{g} = m g = \dfrac{1}{6}\pi d^3 \rho\, g$ a odporová sila $F_\mathrm{o} = \dfrac{1}{8}\rho_0\, c_x\, \pi d^2 v^2$.

Pomer obidvoch síl pri rýchlosti v_d je

$$p_\mathrm{d} = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{g}} = \frac{3}{4}\frac{\rho_0\, c_x\, v_\mathrm{d}^2}{d\, \rho\, g}$$ **1 bod**

e) Pre danú hodnotu pomeru p_d1 dostaneme hustotu telesa

$$\rho_1 = \frac{3}{4}\frac{\rho_0\, c_x\, v_\mathrm{d}^2}{d_1\, g\, p_\mathrm{d1}} \approx 45{\cdot}10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}.$$

Žiadna z látok nemá tak veľkú hustotu. **1 bod**
Pre hustotu kameňa je pomer $p_\mathrm{d1k} \approx 0{,}16$. V tomto prípade sa už začína odpor badateľne prejavovať. Jeho zanedbanie zvyšuje nepresnosť výsledku. **1 bod**

f) Pre loptičku so známou hmotnosťou vyjadríme pomer síl

$$p_\mathrm{d2} = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{g}} = \frac{\rho_0\, c_x\, \pi d^2 v_\mathrm{d}^2}{8\, m\, g} \approx 6{,}1$$ **1 bod**

Pri páde z dostatočnej výšky sa ustáli rýchlosť pádu ($F_\mathrm{o} = F_\mathrm{g}$)

$$v_\mathrm{m1} = \sqrt{\frac{8\, m\, g}{\rho_0\, c_x\, \pi d^2}} \approx 8{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$ **1 bod**

Z výsledku vidno, že pre stolnotenisovú loptičku možno zanedbať odpor vzduchu iba pri veľmi malých rýchlostiach $v << v_\mathrm{m1}$. Voľným pádom bez odporu vzduchu by loptička nadobudla rýchlosť v_m1 na dráhe $h \approx 3{,}5$ m. Pomer síl $p_\mathrm{d} = 1$ % loptička však dosiahne už pri rýchlosti 0,83 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, čo predstavuje pád z výšky 3,5 cm.

3. *Jazda smrti*

a) Pri pohybe jazdca po kruhovej trajektórii postupne klesá jeho kinetická energia na úkor zvýšenia potenciálnej. V najvyššom bode platí podľa zákona zachovania mechanickej energie

$$(1/2)\, m\, v_1^2 = (1/2)\, m\, v_2^2 + 2\, m\, g\, R.$$

Rýchlosť v najvyššom bode (za predpokladu, že ho motorka dosiahne) je

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4 g R}\,.$$

a) 2 body

b) Ak má ale prejsť horným bodom, musí byť prítlačná sila k stene $F \geq 0$. V najvyššom bode je táto sila rovná rozdielu medzi odstredivou a tiažovou

$$F_2 = m\frac{v_2^2}{R} - m g = m\frac{v_1^2}{R} - 5 m g \geq 0 \qquad (1)$$

V najnižšom bode sa obidve sily sčítajú

$$F_1 = m\frac{v_1^2}{R} + m g\,.$$

b) 2 body

c) Hraničná podmienka nerovnice (1) je

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{R g} \approx 5{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

a pre zodpovedajúcu rýchlosť v dolnom bode

$$v_{1\mathrm{m}} = \sqrt{5 g R} \approx 13{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

c) 2 body

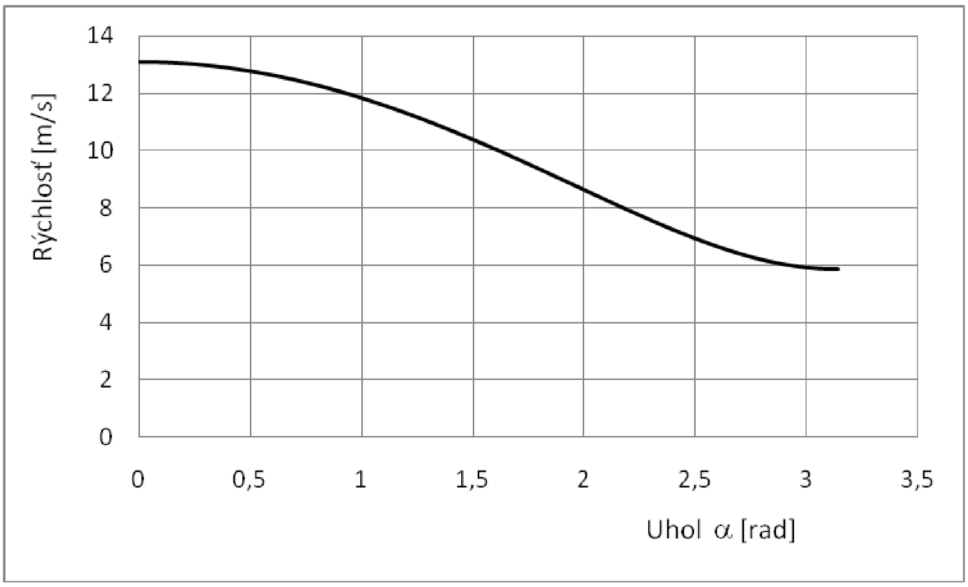
d) S použitím zákona zachovania mechanickej energie dostaneme

$$\frac{1}{2} m v_{1\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g h = \frac{1}{2} m v^2 + m g R (1 - \cos\alpha)\,,$$

odkiaľ dostaneme

$$v = \sqrt{g R\, (3 + 2\cos\alpha)}\quad .$$

2 body



graf 2 body

4. *Guľôčka v pohári*

Ak je guľôčka viečkom zatlačená do vody, pôsobia na ňu tri sily – tiažová, vztlaková a tlaku viečka, ktoré sú v rovnováhe. Sila tlaku viečka je potom

$$F = (\rho V - m)\, g\,, \qquad \textbf{2 body}$$

kde ρ je hustota vody, m a V sú hmotnosť a objem guľôčky.
Ak sa dá nádoba do pohybu v zvislom smere nahor so zrýchlením a, pôsobí na guľôčku i na kvapalinu zotrvačná sila, ktorá má vo vzťažnej sústave spojenej s nádobou rovnaký efekt, ako keby sa tiažové zrýchlenie zmenilo z g na $g+a$.
Sila tlaku viečka na guľôčku je v tomto prípade

$$F^* = (\rho V - m)\,(g + a)\,. \qquad \textbf{4 body}$$

Relatívna zmena tlakovej sily je

$$\eta = \frac{F^* - F}{F} = \frac{a}{g} \approx 20{,}4\ \%. \qquad \textbf{4 body}$$

5. *Chlapec na kryhe*

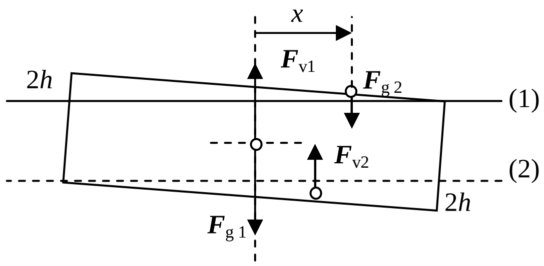
a) Vychádzame z podmienky rovnováhy síl. Vztlakovú silu určíme z Archimédovho zákona.

$$m\,g + \rho_{\mathrm{L}} d\, a^2 g - \rho_{\mathrm{V}}\,(d - h)\,a^2\, g = 0$$

odkiaľ dostaneme

$$d = \frac{m + \rho_{\mathrm{V}} h\, a^2}{(\rho_{\mathrm{V}} - \rho_{\mathrm{L}})\,a^2} \approx 32{,}2\ \mathrm{cm}. \qquad \textbf{4 body}$$

b) Ak sa chlapec posunie o x, kryha sa nakloní, ale objem ponorenej (vynorenej) časti sa nezmení. Ak sa jeden koniec ponorí až k hladine, dĺžka vynorenia na druhej strane je $2h$. Obsahy trojuholníka $(1/2)\,a\,(2h)$ a obdĺžnika $a\,h$ sú rovnaké.



Veľkosti síl sa nezmenia, zmení sa len ich rozloženie. Keďže sa kryha nakloní, zmení sa ťažisko pôsobenia vztlakovej sily. Môžeme ju rozdeliť na dve zložky – prvá $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v1}}$ zodpovedajúca časti medzi rovinami (1) až (2) má ťažisko na pôvodnej osi symetrie, druhá $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v2}}$ časti s trojuholníkovým prierezom pod rovinou (2) má ťažisko (pôsobisko vztlakovej sily) v ťažisku trojuholníka, ktoré je pre $2h \ll a$ vo vzdialenosti (1/3) z $a/2$, tzn. $a/6$, od osi.
Ak uvažujeme momentovú rovnováhu na pôvodnú os kryhy, momenty síl F_{g1} tiaže kryhy, F_{v1} vztlakovej sily symetrickej časti ponorenej časti kryhy sú nulové. Nenulové sú iba momenty síl tiaže chlapca a nesymetrickej časti vztlakovej sily

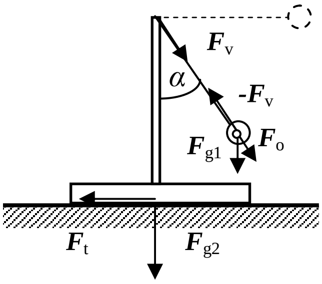
$$m\,g\,x = (1/2)\,2h\,a^2 \rho_{\mathrm{V}}\, g\,(a/6).$$

Odtiaľ dostaneme

$$x = \frac{h\,a^3 \rho_{\mathrm{V}}}{6m} \approx 3{,}9\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{4 body}$$

Keďže okraj kryhy je vzdialený od stredu $x_{\mathrm{m}} = 2$ m, koniec kryhy nepoklesne na úroveň hladiny ani keď sa chlapec postaví na jej okraj. **2 body**

6. Zaujímavé kyvadlo



Pri pohybe guľôčky je vlákno napínané silou $\boldsymbol{F}_v$, ktorá je určená odstredivou silou $\boldsymbol{F}_o$ a zložkou tiažovej sily $\boldsymbol{F}_{g1}$ v smere vlákna

$$F_v = F_o + F_{g1} \cos\alpha.$$

Na dosku pôsobí vo vodorovnom smere vodorovná zložka sily F_v a v opačnom smere sila trenia F_t.

Uhlu α, kedy sa doska pohne, zodpovedá hraničná hodnota sily trenia

$$F_{tm} = f\ F_n,$$

kde normálová sila medzi doskou a podložkou je

$$F_n = F_{g2} + F_v \cos\alpha$$

a $\quad F_{tm} = F_v \sin\alpha.$

Po uvoľnení sa guľa pohybuje nadol, pričom stojan sa nepohybuje. Podľa zákona zachovania mechanickej energie platí pri dosiahnutí uhla α

$$m\, g\, l \cos\alpha = (1/2)\, m\, v^2.$$

Odstredivá sila je v tom okamihu

$$F_o = m\, v^2/l = 2\, m\, g \cos\alpha.$$

a) Sila, ktorá napína vlákno, je

$$F_v = 3\, m\, g \cos\alpha.$$

6 bodov

b) Pre silu trenia dostaneme po dosadení rovnicu

$$F_v \sin\alpha = f\ (M\, g + F_v \cos\alpha)$$

a odtiaľ

$$f = \frac{F_v \sin\alpha}{M\, g + F_v \cos\alpha} = \frac{3m \sin\alpha \cos\alpha}{M + 3m \cos^2\alpha}.$$

4 body