Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória D

Riešenie úloh krajského kola

1. Meranie zrýchlenia

Riešenie:

a) Pre vrh nahor platí rovnica

$$h = v_0\, t \;-\; (1/2)\, g_0\, t^2$$

$$v = v_0 - g\, t\,.$$

Po vylúčení času dostaneme

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2 g_0}$$

Pre získané namerané hodnoty je

$$2 g_0\, h_1 = v_0^2 - v_1^2$$

$$2 g_0\, h_2 = v_0^2 - v_2^2$$

odkiaľ

$$2 g_0 \left(h_2 - h_1\right) = v_1^2 - v_2^2$$

a teda

$$g_0 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\left(h_2 - h_1\right)} \approx 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$ **4 body**

b) Rýchlosť vrhu je

$$v_0 = \sqrt{\frac{v_1^2\, h_2 - v_2^2\, h_1}{h_2 - h_1}} \approx 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$ **3 body**

c) Maximálna výška je daná podmienkou $v = 0$, z ktorej dostaneme

$$h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2 g_0} = \frac{1}{2 g_0}\,\frac{v_1^2\, h_2 - v_2^2\, h_1}{h_2 - h_1} \approx 5{,}6\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

Pri riešení možno s výhodou použiť aj zákon zachovania mechanickej energie.

2. Hustota kvapaliny

Riešenie:

Na koncoch páky pôsobia sily rovné výslednici tiažovej sily pôsobiacej na guľu a sily vztlakovej

$$F_1 = \rho_0\, V g - \rho_1\, V g = (\rho_0 - \rho_1)\, V g$$

$$F_2 = \rho_0\, V g - \rho_2\, V g = (\rho_0 - \rho_2)\, V g.$$

V stave rovnováhy sú momenty obidvoch síl vzhľadom na bod zavesenia tyčky rovnaké

$$F_1\, x = F_2\, y$$

a po dosadení dostaneme

$$(\rho_0 - \rho_1)\, x = (\rho_0 - \rho_2)\, y.$$

Hustota neznámej kvapaliny je $\rho_2 = \rho_0 - \left(\rho_0 - \rho_1\right)\dfrac{x}{y} \approx 1\,567\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. **5 bodov**

Pre petrolej je $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{\rho_0 - \rho_3}{\rho_0 - \rho_1} \approx \dfrac{19}{17}$. **5 bodov**

3. Pohyb v žľabe

Riešenie:

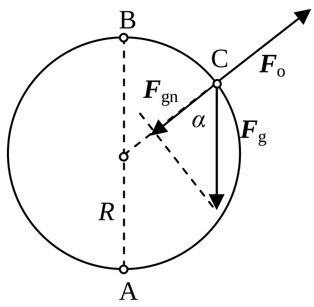
Teliesko sa pohybuje v tiažovom poli, pričom platí zákon zachovania mechanickej energie

$$m\,g\,h = m\,g\,y + (1/2)\,m\,v^2,$$

kde y je výška telieska v žľabe a v rýchlosť pohybu v tejto výške.

Teliesko sa pohybuje po kruhovej trajektórii v žľabe, ak je prítlačná sila $F \geq 0$. Prítlačná sila daná rozdielom odstredivej sily a kolmej zložky tiažovej sily

$$F = \frac{m v^2}{R} - m g \cos\alpha .$$



a) Ak má prejsť teliesko horným bodom B, musí platiť podmienka

$$\frac{m v^2}{R} \geq m g \ .$$

Zo ZZME pre $y = 2R$ je

$$m\,g\,h_1 = m\,g\,2R + (1/2)\,m\,v^2.$$

Spojením obidvoch výrazov dostaneme

$$h_1 \geq \frac{5R}{2} \approx 87{,}5 \text{ cm.}$$ **3 body**

b) Pri výške h_2 je tlaková sila v polohách A a B

$$F_A = \frac{m v^2}{R} + m g \text{ , kde } m\,g\,h_2 = (1/2)\,m\,v^2$$

$$F_B = \frac{m v^2}{R} - m g \text{ , kde } m\,g\,h_2 = 2\,m\,g\,R + (1/2)\,m\,v^2.$$

Po dosadení dostaneme výsledky

$$F_A = m g \left(\frac{2 h_2}{R} + 1 \right) \approx 0{,}77 \text{ N}$$ **2 body**

$$F_B = m g \left(\frac{2 h_2}{R} - 5 \right) \approx 0{,}18 \text{ N}$$ **2 body**

c) Pre $h_3 < h_1$ teliesko nevykoná celú otáčku a opustí žľab v bode C daný uhlom α_m, pre ktorý platí

$$m g \cos\alpha_m = \frac{m v^2}{R}, \text{ pričom } m\,g\,h_3 = m\,g\,R\,(1+\cos\alpha_m) + (1/2)\,m\,v^2.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\cos\alpha_m = \frac{2}{3}\left(\frac{h_3}{R} - 1 \right) \approx 0{,}48 \qquad \alpha_m \approx 62°,$$

a odtiaľ

$$y_C = R\,(1 + \cos\alpha_m) \approx 52 \text{ cm.}$$ **3 body**

4. Lode na rieke

Riešenie:

Označme d vzdialenosť miest A, B. Túto vzdialenosť prekonajú lode po prúde rieky za čas $t_{1p} = d/(v_v + v_p)$ a $t_{1c} = d/(v_v + v_c)$. Pre pomer týchto časov platí

$$\frac{t_{1c}}{t_{1p}} = k_1 = \frac{v_p + v_v}{v_c + v_v}.$$

Pre pohyb proti prúdu rieky platí podobne

$$\frac{t_{2c}}{t_{2p}} = k_2 = \frac{v_p - v_v}{v_c - v_v}.$$

V zadaní vidíme ďalšiu informáciu, podľa ktorej je rozdiel dráhy lodí za čas t_h = 1 hod rovný s, čo možno zapísať vzťahom

$$s = (v_p - v_c)\, t_h.$$

Z týchto troch vzťahov dostaneme po úprave

a) $$v_c = \frac{k_2 + k_1 - 2}{k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1}\,\frac{s}{2\,t_h} \approx 12 \text{ km/hod}$$

$$v_p = \frac{2k_1 k_2 - k_1 - k_2}{k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1}\,\frac{s}{2\,t_h} \approx 20 \text{ km/hod}$$ **2 x 3 body**

b) $$v_v = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1}\,\frac{s}{2\,t_h} \approx 4{,}0 \text{ km/hod.}$$ **2 body**

Ak sa plaví parník po prúde, platí pre vzdialenosť miest

$$D = (v_v + v_p)\, t_p = \frac{k_1 k_2 - k_1}{k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1}\,\frac{s}{t_h} t_p \approx 60 \text{ km.}$$ **2 body**

---

50. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autor úloh: Ľubomír Konrád

Recenzia: Ľubomír Mucha, Mária Kladivová

Redakcia: Ivo Čáp

Vydanie publikácie je hradené z dotácie Ministerstva školstva SR prostredníctvom IUVENTY v Bratislave