Fyzikálna olympiáda

50. ročník

školský rok 2008/09

Kategória E

Riešenie úloh domáceho kola

1. *Cyklistka*

Na cestu do mestečka potrebovala Majka čas T_1 = 55 min a na cestu nazad čas T_2 = 90 min. Ak označíme dĺžku nakloneného úseku cesty s_1 a dĺžku vodorovného úseku s_2, tak pre jednotlivé cesty platia rovnice

$$T_1 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2},$$

$$T_2 = \frac{s_2}{v_3} + \frac{s_1}{v_4}.$$ ***2 body***

Riešením tejto sústavy rovníc postupne dostaneme

$$s_1 = \left(T_2 v_3 - T_1 v_2\right)\frac{v_1 v_4}{v_1 v_3 - v_2 v_4} = 3{,}0 \text{ km},$$

$$s_2 = \left(T_1 v_1 - s_1\right)\frac{v_2}{v_1} = 6{,}0 \text{ km}.$$

Vzdialenosť tábora od mestečka je potom $d = s_1 + s_2$ = 9,0 km. ***4 body***

<u>Pozn.:</u> Všeobecné riešenie uvedenej sústavy rovníc je dosť náročne, preto môžu žiaci úlohu riešiť aj tak, že do sústavy dosadia hodnoty známych veličín a vypočítajú hodnoty s_1 a s_2. Treba však dbať na dosadenie číselných hodnôt v príslušných jednotkách.

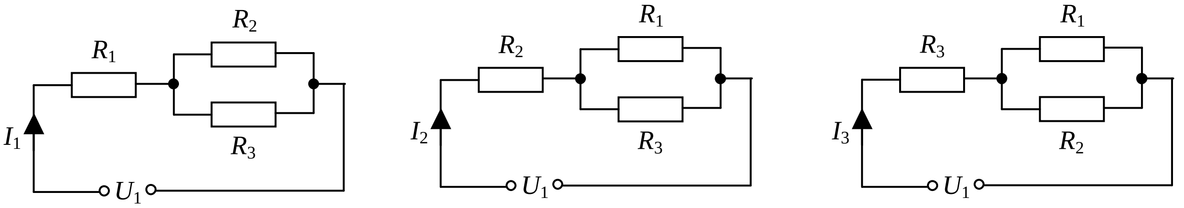
Pre priemerné rýchlosti cyklistky na ceste do mestečka a nazad do tábora platí

$$v_{\text{p1}} = \frac{d}{T_1} \approx 9{,}8 \text{ km/h},$$ ***2 body***

$$v_{\text{p2}} = \frac{d}{T_2} = 6{,}0 \text{ km/h}.$$ ***2 body***

2. *Spájanie rezistorov*

Schémy jednotlivých zapojení sú na obrázku. ***2 body***



Pre celkový odpor rezistorov v prvej schéme platí

$$R_{\text{v1}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Pre prúd prechádzajúci obvodom potom podľa Ohmovho zákona platí

$$I_1 = \frac{U_1}{R_{v1}} = \frac{U_1\left(R_2 + R_3\right)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

V druhom prípade je sériovo pripojený rezistor s odporom R_2, preto pre celkový odpor platí

$$R_{\text{v2}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Prúd prechádzajúci obvodom je

$$I_2 = \frac{U_1}{R_{v2}} = \frac{U_1(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}.$$

V treťom prípade je sériovo pripojený rezistor s odporom R_3, takže platí

$$R_{v3} = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Prúd prechádzajúci obvodom je v tomto prípade

$$I_3 = \frac{U_1}{R_{v3}} = \frac{U_1(R_1 + R_2)}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}.$$

Pre hľadaný pomer prúdov v jednotlivých zapojeniach potom platí

$$I_1 : I_2 : I_3 = (R_2 + R_3) : (R_1 + R_3) : (R_1 + R_2).$$

Pre dané hodnoty platí

$$I_1 : I_2 : I_3 = 25 : 20 : 15 = 5 : 4 : 3.$$ ***6 bodov***

Z predchádzajúcich výpočtov je zrejmé, že na hľadaný pomer prúdov nemá vplyv veľkosť napätia zaradeného zdroja. Preto sa po pripojení zdroja s napätím U_2 = 18 V výsledok úlohy nezmení.

2 body

3. Zavesená hojdačka

Označme sily, ktorými sú napínané závesy hojdačky na ľavom a na pravom konci, postupne F_1 a F_2. Ak je hojdačka prázdna, závesy sú namáhané rovnako veľkými silami, ktoré sa rovnajú polovici tiaže hojdačky, t.j. $F_1 = F_2 = mg/2$ = 100 N. ***1 bod***

Ak sa na hojdačku posadí Janko s hmotnosťou m_1 vo vzdialenosti x od ľavého konca lavičky, platí pre momenty pôsobiacich síl vzhľadom na os prechádzajúcu ľavým koncom hojdačky podmienka $m_1gx + mgd/2 = F_2d$, odkiaľ

$$F_2 = \left(m_1\frac{x}{d} + \frac{m}{2}\right)g = 300 \text{ N}.$$ ***2 body***

Pre momenty pôsobiacich síl vzhľadom na os prechádzajúcu pravým koncom lavičky podmienka $F_1d = m_1g(d - x) + mgd/2$, odkiaľ

$$F_1 = \left(m_1\frac{d - x}{d} + \frac{m}{2}\right)g = 500 \text{ N}.$$ ***2 body***

Predpokladajme, že sily namáhajúce závesy hojdačky budú rovnako veľké vtedy, ak sa Karol s hmotnosťou m_2 posadí na lavičku vo vzdialenosti y od jej pravého konca. Podmienky rovnováhy vzhľadom na ľavý, resp. pravý koniec lavičky majú potom tvar

$$m_1gx + mgd/2 + m_2g(d - y) = F_2d,$$

$$F_1d = m_1g(d - x) + mgd/2 + m_2gy.$$

Keďže má platiť $F_1 = F_2$, vyjadríme z predchádzajúcich rovníc tieto sily a dáme ich do rovnosti. Z tejto rovnice potom vyjadríme hľadanú vzdialenosť

$$y = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) + x\frac{m_1}{m_2} = 52{,}5 \text{ cm}.$$ ***3 body***

Ak je bremeno s hmotnosť m_3 umiestnené v strede lavičky, na každý záves hojdačky pôsobí sila $F = (m + m_3)g/2$. Ak má mať táto sila maximálnu hodnotu $F = F_\mathrm{m}$, je maximálna hmotnosť bremena

$$m_3 = \frac{2F_\mathrm{m}}{g} - m = 460 \text{ kg}.$$ ***2 body***

4. Parný kotol

Na zohriatie uvedeného množstva vody z teploty t_1 na teplotu t_2 je potrebné dodať teplo

$Q_1 = m_1 c \Delta t = V\rho c(t_2 - t_1) \approx 1066$ MJ. ***3 body***

Ak sa má jedna tretina zohriatej vody premeniť na paru rovnakej teploty, je celkové teplo potrebné na zohriatie vody a následné odparenie uvedenej časti vody rovné

$Q_2 = m_1 c \Delta t + \frac{1}{3} m_1 l_v = V\rho c(t_2 - t_1) + \frac{1}{3} V\rho l_v = Q_1 + \frac{1}{3} V\rho l_v = 3326$ MJ. ***3 body***

Účinnosť kotla definujeme vzťahom $\eta = Q/(mH)$, kde Q je teplo získané spálením uhlia s hmotnosťou m a výhrevnosťou H. Ak dosadíme do tohto vzťahu teplo Q_2, hmotnosť potrebného uhlia je $m = Q_2/(\eta H) \approx 148$ kg. ***4 body***

5. Vzducholoď

Keď je vzducholoď v rovnováhe (neklesá ani nestúpa), sú v rovnováhe celková tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$ pôsobiaca na vzducholoď a vztlaková sila $\boldsymbol{F}_{vz}$. Celková tiažová sila je súčtom tiažovej sily pôsobiacej na vzducholoď s hmotnosťou m_0, na náklad s hmotnosťou m_1, ktorý nesie, a na plyn s hustotou ρ_1, ktorým je naplnená. Platí preto

$m_0 g + m_1 g + V\rho_1 g = V\rho_0 g$,

odkiaľ hustota plynu vo vnútri komory vzducholode je

$\rho_1 = \rho_0 - \frac{m_0 + m_1}{V} = 0{,}35$ kg/m^3. ***4 body***

Ak by bola vzducholoď naplnená čistým héliom s hustotou ρ_2, bola by celková tiažová sila pôsobiaca na vzducholoď menšia ako v prvom prípade (a teda menšia ako vztlaková sila), vzducholoď by sa preto pohybovala smerom nahor. ***2 body***

Ak vzducholoď ponesie náklad s hmotnosťou m_2 a bude naplnená héliom s hustotou ρ_2, bude mať podmienka rovnováhy (vznášania vzducholode) tvar

$m_0 g + m_2 g + V\rho_2 g = V\rho_0 g$,

odkiaľ pre hľadanú hmotnosť dostaneme

$m_2 = V(\rho_0 - \rho_2) - m_0 = 2\,455$ kg. ***4 body***

6. Prieskumný čln

Prieskumný čln dorazí k ostrovu B za čas $t_1 = d / v_2 = 2{,}5$ h = 2 h 30 min, t.j. presne o 5:30 miestneho času. ***2 body***

Označme t_2 čas, ktorý uplynie od otočenia člna pri ostrove B do opätovného stretnutia člna s flotilou. Čln sa stretne s flotilou vo vzdialenosti x od ostrova A. Z pohľadu flotily platí $x = v_1(t_1 + t_2)$, z pohľadu člna zasa $x = d - v_2 t_2$. Porovnaním pravých strán týchto rovníc dostaneme $v_1(t_1 + t_2) = d - v_2 t_2$, odkiaľ

$t_2 = \frac{d - v_1 t_1}{v_2 + v_1} = d\frac{v_2 - v_1}{v_2(v_2 + v_1)} = \frac{5}{6}$ h = 50 min. ***5 bodov***

Čln sa teda opäť stretne s flotilou o 6:20 miestneho času. ***1 bod***

Vzdialenosť x určíme napr. zo vzťahu $x = d - v_1(t_1 + t_2) = v_2 t_2 = 23{,}3$ km. ***2 body***

---

50. ročník Fyzikálnej olympiády – *Riešenia úloh domáceho kola kategórie E*

Autor úloh: Ľubomír Konrád
Recenzia: Ivo Čáp, Margita Brezinová
Redakcia: Ľubomír Konrád
Finančné zabezpečenie: Ministerstvo školstva SR prostredníctvom Iuventy