

Fyzikálna olympiáda

51. ročník

v školský rok 2009/2010

Kategória A

Riešenie úloh domáceho kola

(ďalšie informácie na <http://fpv.uniza.sk/fo> alebo www.olympiady.sk)

V rámci prípravy riešiteľom FO odporúčame súčasne riešiť aj úlohy nižších kategórií
a Fyzikálny korešpondenčný seminár FKS www.fks.sk

Odporúčame sledovať študijné materiály FO ČR
<http://fo.cuni.cz/> - archív
<http://pdf.uhk.cz/kfyi/Olympid/olymp/materialy/index.htm>

1. Dolet s podporou vetra

Riešenie:

a) Bez uvažovania odporu vzduchu ide o ideálny šikmý vrh s parabolickou trajektóriou a doletom

$$d_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Pre jednotlivé prípady dostaneme hodnoty $d_{01} = 55,2$ m, $d_{02} = 63,7$ m, $d_{03} = 55,2$ m.

Riešenie metódou konečných prírastkov:

V určitom okamihu pohybu má loptička zložky rýchlosti v_x a v_y vzhľadom na zem. Keďže sa vzduch pohybuje rýchlosťou v_v v smere osi x , je vodorovná zložka rýchlosti pohybu loptičky vzhľadom na vzduch $v_{rx} = v_x - v_v$. Relatívna rýchlosť pohybu loptičky vzhľadom na vzduch má veľkosť

$$v_r = \sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2}$$

a smer daný uhlom β vzhľadom na rovinu ihriska, pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x - v_v} .$$

Vodorovná zložka sily, ktorá pôsobí na loptičku, je

$$\begin{aligned} F_x &= -k v_r^2 \cos \beta = -k [(v_x - v_v)^2 + v_y^2] \frac{v_x - v_v}{\sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2}} = \\ &= -k(v_x - v_v) \sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

a zvislá zložka

$$\begin{aligned} F_y &= -mg - k v_r^2 \sin \beta = -mg - k [(v_x - v_v)^2 + v_y^2] \frac{v_y}{\sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2}} = \\ &= -mg - k v_y \sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

Zložky zrýchlenia vzhľadom na ihrisko sú

$$a_x = -\frac{k}{m} (v_x - v_v) \sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2}$$

$$a_y = -g - \frac{k}{m} v_y \sqrt{(v_x - v_v)^2 + v_y^2} .$$

Z hodnoty zložiek rýchlosti v čase t určíme hodnoty v čase $t + \Delta t$

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t) \Delta t$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y(t) \Delta t,$$

pričom východiskové počiatkové hodnoty sú $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ a $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$.

Podobne určíme súradnice

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \Delta t,$$

pričom počiatkové hodnoty sú $x(0) = 0$ a $y(0) = 0$.

Algoritmus výpočtu možno naprogramovať vo vhodnom programe. Pre vzorový výpočet bol použitý tabuľkový procesor EXCEL 2007.

Výsledky numerických výpočtov:

b) Dolet loptičky s odporom vzduchu ale bez vetra (srv. bez odporu vzduchu)

Uhol vrhu α [°]	30	45	60
Dolet d_2 [m]	42,8 (55,2)	46,5 (63,7)	39,5 (55,2)

Z výsledkov vidno, že odpor vzduchu výrazne zníži dolet loptičky (pre 45° pokles o 27 %). Ďalej vidno, že skrátenie doletu sa výraznejšie prejaví pri väčšom uhle α .

c) Dolet loptičky s podporou vetra

Uhol vrhu α [°]	30	45	60
Dolet d_3 [m]	46,4	51,8	45,1

Z výsledkov vidno, že podpora vetra (ide o pomerne slabý vietor (18 km/h)) sa v danom prípade prejaví významne – pre 45° predĺženie o 11 % oproti bezvetriiu.

d) Dolet loptičky proti vetru

Uhol vrhu α [°]	30	45	60
Dolet d_4 [m]	38,7	40,5	32,7

Vidíme podobne, že vietor sa prejaví pri uhle vrhu 45° skrátením doletu o 13 %. Je zrejmé, že vplyv vetra sa viac prejaví pri väčších uhloch vrhu ako pri menších, lebo pri veľkých uhloch je loptička dlhší čas vystavená pôsobeniu prostredia.

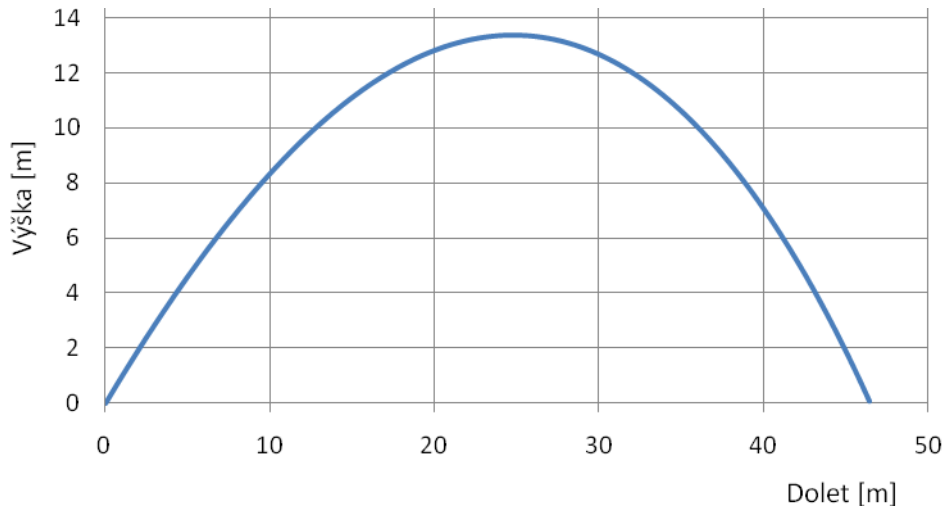
e) Posúdenie presnosti výsledku

Časový krok	podľa a)	numericky				
Δt [ms]		10	20	40	100	200
Dolet d_1 [m]	63,7	63,9	64,1	64,4	65,5	67,2

Z výsledku je zrejmé, že presnosť numerického výpočtu významne závisí od voľby dĺžky časového kroku Δt . Pri analytickom riešení podľa a) sa uvažujú spojité závislosti veličín, tzn. $\Delta t \rightarrow 0$. Výsledok možno považovať za presný v rámci presnosti vstupných veličín.

Z výsledkov vidno, že pri kroku 10 ms je odchýlka výsledku 0,3 %, čo možno považovať za veľmi presný výsledok. Pri $\Delta t = 0,1$ s je odchýlka 2,8 %, čo je už dosť nepresný výsledok. V prípade kroku 200 ms 5,5 %, čo možno považovať za „orientačný“ výsledok. Pri $\Delta t = 10$ ms je v počiatočnej fáze delenie dráhy $\Delta s = 25$ cm, pri $\Delta t = 200$ ms je $\Delta s = 5$ m. Je zrejmé, že delenie dráhy zhruba po 5 m, čo je približne 10 % doletu, je z hľadiska presnosti nedostatočné.

Pozn.: Z výsledku je zrejmé, že pri znižovaní kroku Δt je výsledok presnejší. Na druhej strane to kladie väčšie nároky na výpočtové kapacity (viac krokov výpočtu a tým aj výpočtový čas). Navyše pri náročnejších úlohách treba sledovať aj stabilitu výpočtu, lebo v určitých prípadoch môže chyba výpočtu pri náraste počtu krokov narastať a viesť k „divergentným“ výsledkom (veľmi vzdialeným od správneho výsledku).



Príklad grafu pre let loptičky s vplyvom odporu prostredia a bez podpory vetra.

2. Rezonančný obvod

Riešenie:

- a) Nulový fázový rozdiel napätia a prúdu zodpovedá reálnej impedancii, resp. admitancii, záťaže. Admitancia záťaže zdroja je

$$\dot{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left[C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

Rezonancia nastane, ak je imaginárna časť admitancie nulová, z čoho dostaneme rezonančnú uhlovú frekvenciu

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \approx 100 \text{ krad}\cdot\text{s}^{-1} \quad f_r = 15,9 \text{ kHz}.$$

- b) V stave rezonancie je admitancia záťaže

$$Y_r = \frac{RC}{L} \approx 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ S} \quad I_r \approx 7,2 \text{ mA}.$$

Pre pomer prúdov v stave rezonancie je

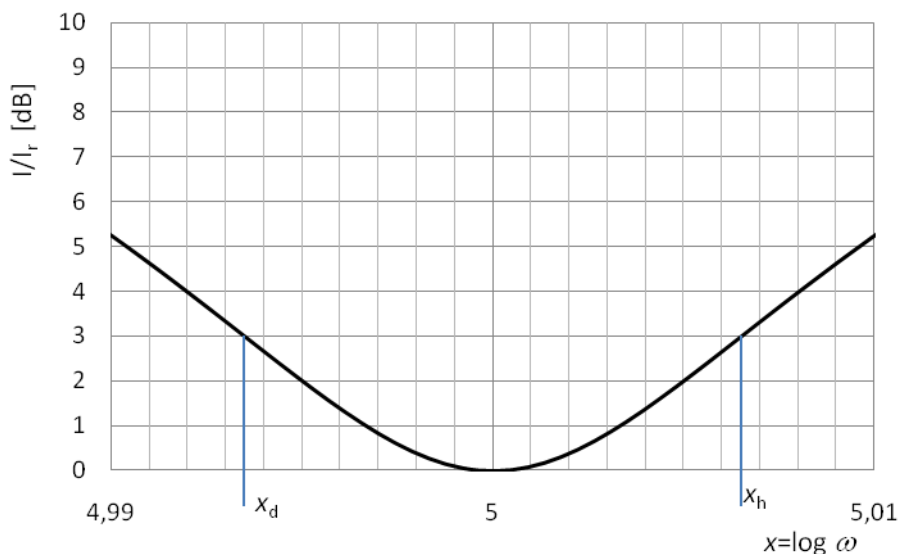
$$Q = \frac{I_{Cr}}{I_r} = \left| \frac{R + j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right| = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{\omega_r L}{R} \approx 33.$$

- c) V stave rezonancie je výkon zdroja

$$P_r = \frac{1}{2} U_m^2 Y_r = \frac{1}{2} U_m^2 \frac{RC}{L} \approx 43 \text{ mW}$$

- d) Graf frekvenčnej charakteristiky prúdu zdroja zodpovedá vzťahu

$$\frac{I}{I_r} = \sqrt{\left[\frac{L/C}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2 \left[1 - \frac{L/C}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2}$$



Z grafu možno určiť hodnoty $x_d = 4,9935$, odkiaľ $\omega_d = 98\,514$ rad/s a $x_h = 5,0065$, odkiaľ $\omega_h = 101\,508$ rad/s. Šírka pásma je $\Delta\omega \approx 2\,994$ rad/s a odtiaľ činiteľ kvality $Q = 33,4$. Táto hodnota zodpovedá s dostatočnou presnosťou hodnote, ktorá vyplýva z hodnôt primárnych parametrov.

3. Zobrazenie šošovkou

Riešenie:

a) Podľa zákonov geometrickej optiky Určíme vzťahy medzi uhlami lúčov. Lúč 1 vniká kolmo do šošovky a dopadá pod uhlom dopadu α (vzhľadom na kolmicu) na zakrivenú plochu šošovky. Na rozhraní sa lúč láme pod uhlom lomu β , pre ktorý platí

$$\sin \beta = n \sin \alpha. \quad (1)$$

Ak je vzdialenosť lúča 1 od osi y , je uhol dopadu daný vzťahom $\sin \alpha = y / R$. (2)

Lúč prechádza cez vrstvu skla s hrúbkou

$$x = x_0 - R (1 - \cos \alpha), \quad (3)$$

kde x_0 je hrúbka šošovky vo vrchole.

Poloha ohniska F je daná ohniskovou vzdialenosťou $f = VF$, pričom platí

$$y = [f + (x_0 - x)] \operatorname{tg} \varphi, \text{ kde } \varphi = \beta - \alpha. \quad (4)$$

Ak je šošovka "tenká", tzn. $x_0 \ll R$ a teda $\alpha \ll 1$ rad, platí približne $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ atď. a teda

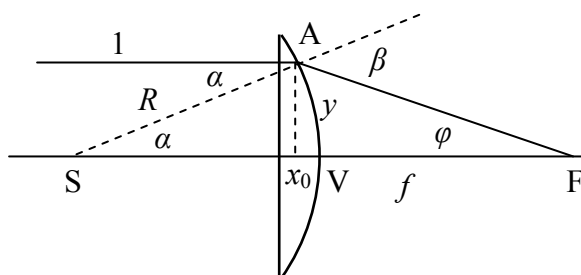
$$y \approx f \varphi = f(\beta - \alpha) \quad (5)$$

a z (1) a (2) $y \approx R \alpha$ a $\beta \approx n \alpha$.

$$f(\beta - \alpha) = R \alpha$$

a odtiaľ $f = \frac{R}{(n-1)} \approx 16,7$ cm.

Vidíme, že pri hrúbke zväzku $d = 10$ mm a vypočítanej ohniskovej vzdialenosti sú zjednodušujúce podmienky dobre splnené (pre krajný lúč je $\operatorname{tg} \varphi = 0,03 \ll 1$).



Optická dráha lúča od rovinného čela šošovky (geometrická dráha násobená indexom lomu) je

$$\begin{aligned}
 l_{\text{opt}} &= n x + l = n [x_0 - R(1 - \cos \alpha)] + \sqrt{y^2 + [f + R(1 - \cos \alpha)]^2} = \\
 &= n x_0 - n R(1 - \cos \alpha) + \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + [f + R(1 - \cos \alpha)]^2} = \\
 &= n x_0 - f n(n-1)(1 - \cos \alpha) + f \sqrt{1 + 2n(n-1)(1 - \cos \alpha)} \approx \\
 &\approx n x_0 - f n(n-1)(1 - \cos \alpha) + f + f n(n-1)(1 - \cos \alpha) = n x_0 + f
 \end{aligned}$$

Pri úprave sa použila približná rovnosť $\sqrt{1+2z} \approx 1+z$ pre $z \ll 1$.

Vidíme, že optická dráha nezávisí od súradnice y lúča, a preto všetky lúče zväzku sa v ohnisku stretávajú s rovnakou fázou a predstavujú interferenčné maximum.

b) Na štrbinu dopadá rovinná vlna a preniká cez štrbinu. Zjednodušená úvaha vychádza z toho, že zväzok vyžarovaný štrbinou rozdelíme na dve polovice, zastúpené lúčmi 1 a 2. Ak nás zaujíma vyžarovanie v smere odchýlenom o uhol φ od osi, je optická dráha spodného lúča 2 dlhšia od optickej dráhy horného lúča 1 o rozdiel

$$\Delta l = (\delta/2) \sin \varphi,$$

kde d je šírka štrbiny.

Ak je rozdiel optických dráh rovný nepárnemu násobku polovice vlnovej dĺžky $\lambda/2$, dochádza pri ich interferencii v vzájomnému potlačení a v príslušnom smere pozorujeme interferenčné minimum

$$(\delta/2) \sin \varphi_{\text{min}} = (2k+1) (\lambda/2).$$

Ak je rozdiel optických dráh násobkom vlnovej dĺžky, vzniká v dôsledku interferencie maximum

$$(\delta/2) \sin \varphi_{\text{max}} = k \lambda.$$

Prvé maximum je okolo osi (pre $k=0$), druhé maximum je pod uhlom

$$\varphi_{1\text{max}} = \arcsin (2\lambda/\delta).$$

Medzi týmito smermi sa nachádza minimum po uhlom

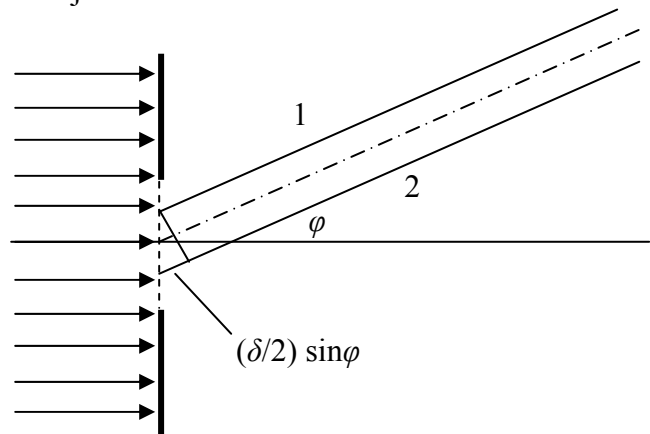
$$\varphi_{1\text{min}} = \arcsin (\lambda/\delta).$$

Pre $\lambda \ll d$ je $\varphi \ll 1$ rad a teda $\sin \varphi \approx \varphi$ a pre uhol prvého minima dostaneme

$$\varphi_{1\text{min}} = \lambda/\delta.$$

Pre uhlovú šírku hlavného maxima okolo osi sústavy platí

$$\Delta \varphi = \lambda/\delta.$$



c) Zbiehavosť vplyvom spojnej šošovky považujeme za inverzný jav k difrakcii na otvore a použijeme pre kruhový otvor výsledky získané pre jednorozmernú štrbinu. Pri priemere d pôvodného zväzku a ohniskovej dĺžke $f \gg d$ je uhol zbiehavosti lúčov

$$\Delta \varphi = 2 \arctg (d/2f) \approx d/f.$$

Uhol rozbiehavosti hlavného maxima, resp. zbiehavosti lúčov, zodpovedá pomeru priemeru otvoru, resp. stopy zaostrenia, a vlnovej dĺžky

$$\Delta \varphi = \lambda / \delta = d / f.$$

Na základe tejto úvahy dostaneme priemer stopy zaostreného lúča v ohniskovej rovine

$$\delta = \lambda \frac{f}{d} \approx 10,6 \mu\text{m}.$$

Opísaná optická metóda má rozlišovaciu schopnosť približne $10 \mu\text{m}$.

Zvýšenie rozlišovacej schopnosti je možné dosiahnuť použitím svetla s najkratšou vlnovou dĺžkou (modré – fialové) a šošovky s krátkou ohniskovou vzdialenosťou. Šírka zväzku laserového žiarenia je väčšinou daná zariadením. V optimálnom prípade sa dá dosiahnuť rozlišovacia schopnosť mierne pod 1 μm .

d) V elektrónovom mikroskope sa využívajú vlnové vlastnosti elektrónového zväzku. Podľa vlnovo–časticovej teórie je vlnová dĺžka elektrónu daná de Broglieho vzťahom

$$\lambda = h / p,$$

kde $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s je Planckova konštanta a $p = m v$ hybnosť elektrónu.

Ak sa elektróny urýchlia v elektrickom poli s rozdielom potenciálom U , platí podľa zákona zachovania mechanickej energie

$$E_k - E_{k0} = e U.$$

Ak zanedbáme malú počiatočnú kinetickú energiu E_{k0} , dostaneme hybnosť urýchlených elektrónov z rovnosti $E_k = e U$.

Keby sme použili klasický vzťah pre kinetickú energiu, dostali by sme rýchlosť elektrónov

$$v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} \approx 1,88 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0,63 c.$$

Keďže ide o rýchlosť blízku rýchlosti svetla vo vákuu c , je výsledok klasického výpočtu veľmi nepresný a treba použiť relativistický vzťah pre kinetickú energiu

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2 = e U \quad \text{odtiaľ} \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{m c^2 + e U} \right)^2} \approx 1,64 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 0,55 c.$$

Hybnosť elektrónov je potom

$$p = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c \sqrt{\left(1 + \frac{e U}{m c^2} \right)^2 - 1}$$

Vlnová dĺžka elektrónov je potom

$$\lambda_e = \frac{h}{m c \sqrt{\left(1 + \frac{e U}{m c^2} \right)^2 - 1}} \approx 3,7 \text{ pm}.$$

S použitím bežne dostupného urýchľovacieho napätia možno získať elektrónový zväzok s veľmi malou vlnovou dĺžkou rádovo pm, tzn. pod úrovňou medziatómových vzdialeností v látkach. Keďže teoretická rozlišovacia schopnosť zariadenia je určená vlnovou dĺžkou, sú elektrónové mikroskopy schopné zobrazovať štruktúry molekulárnych rozmerov.

4. Kyvadlo

Riešenie:

Doba kmitu fyzikálneho kyvadla je daná vzťahom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g a}},$$

kde I je moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a a je vzdialenosť ťažiska od osi otáčania.

a) Ak máme iba samotnú tyč, $I_1 = (1/3) M L^2$ a $a_1 = L/2$.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2 L}{3 g}} \approx 1,64 \text{ s.}$$

Zmena teploty sa prejaví zmenou dĺžky tyče $L = L_0 (1 + \alpha \Delta t)$. Vzhľadom na malú zmenu dĺžky a teda $\alpha \Delta t \ll 1$ môžeme vzťah pre relatívnu zmenu periódy vyjadriť s použitím približného vzťahu $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ pre $x \ll 1$

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \sqrt{1 + \alpha \Delta t} \approx \frac{1}{2} \alpha \Delta t \approx 6,0 \cdot 10^{-5}, \text{ čo je } 5,2 \text{ s/deň.}$$

b) Ak nasunieme na tyč závažie, zmení sa moment zotrvačnosti

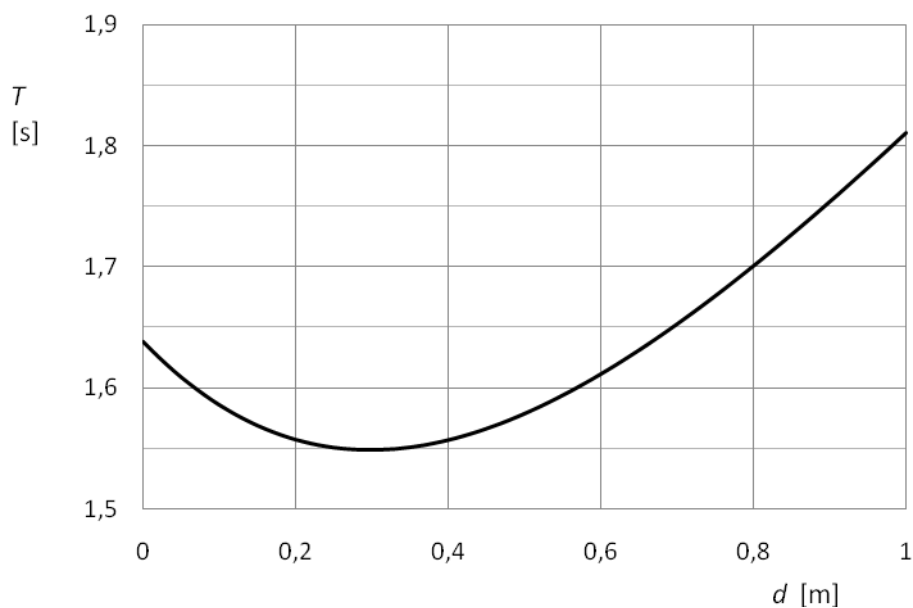
$$I = (1/3) M L^2 + m d^2.$$

Zmení sa aj poloha ťažiska. Vzdialenosť ťažiska od osi otáčania je

$$a = \frac{M L/2 + m d}{M + m}.$$

Doba kmitu je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1/3) M L^2 + m d^2}{g (M L/2 + m d)}} = T_0 \sqrt{\frac{1 + 3(m/M)(d/L)^2}{1 + 2(m/M)(d/L)}}.$$



V grafu vidno výsledok $T_0 = 1,64 \text{ s}$ pre $d = 0$.

- c) Údaje pre minimum periódy dostaneme z podmienky nulovej hodnoty derivácie vzťahu pre periódu.

$$3(d/L)[1 + 2(m/M)(d/L)] = 1 + 3(m/M)(d/L)^2$$

$$\left(\frac{d}{L}\right)^2 + \frac{M}{m}\left(\frac{d}{L}\right) - \frac{M}{3m} = 0$$

odtiaľ dostaneme

$$\frac{d}{L} = -\frac{M}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{2m}\right)^2 + \frac{M}{3m}} \quad (\text{fyzikálny zmysel má iba znamienko +})$$

číselne $(d/L)_{\min} = 0,30$ m.

Po dosadení do vzťahu pre periódu dostaneme

$$T = T_0 \sqrt{\frac{1 + 3(m/M)(d/L)_{\min}^2}{1 + 2(m/M)(d/L)_{\min}}} \approx 1,55 \text{ s.}$$

Porovnaním s grafom zistíme, že hodnoty vyplývajúce z grafu sa zhodujú s výsledkami výpočtu.

5. Vlhkosť vzduchu

Riešenie:

- a) Proces vyparovania vody sa zastaví, keď para v nádobe dosiahne stav nasýtenej pary, alebo ak sa predtým všetka voda vyparí.

Pri teplote $T_1 = 293$ K je tlak nasýtenej pary $p_{N1} = 2,34$ kPa. S použitím modelu ideálneho plynu pre nasýtenú paru, dostaneme hmotnosť vody v nasýtenej pare

$$m_{N1} = M_m \frac{p_{N1} V_1}{R T_1} = (18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}) \frac{(2,34 \cdot 10^3 \text{ Pa})(2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})(293 \text{ K})} \approx 43 \text{ mg}$$

Pri zadaných hmotnostiach nastanú nasledujúce prípady:

1. Vznikne nasýtená para odparením m_{N1} vody a v nádobe zostane 7 g neodparenej vody.
 2. Všetka voda sa vyparí a v nádobe bude para s relatívnou vlhkosťou $\eta_2 = 58$ %.
 3. Všetka voda sa vyparí a v nádobe bude para s relatívnou vlhkosťou $\eta_2 = 23$ %.
- b) Pri rozpínaní vzduchu klesá tlak v nádobe pri konštantnej teplote. Keďže parciálny tlak vodnej pary vo vzduchu je malý, uvažujeme iba s tlakom suchého vzduchu. Výsledný objem vzduchu po expanzii je

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}.$$

Hmotnosť vody v nasýtenej pare v novom objeme a pri teplote $T_2 = T_1$ je

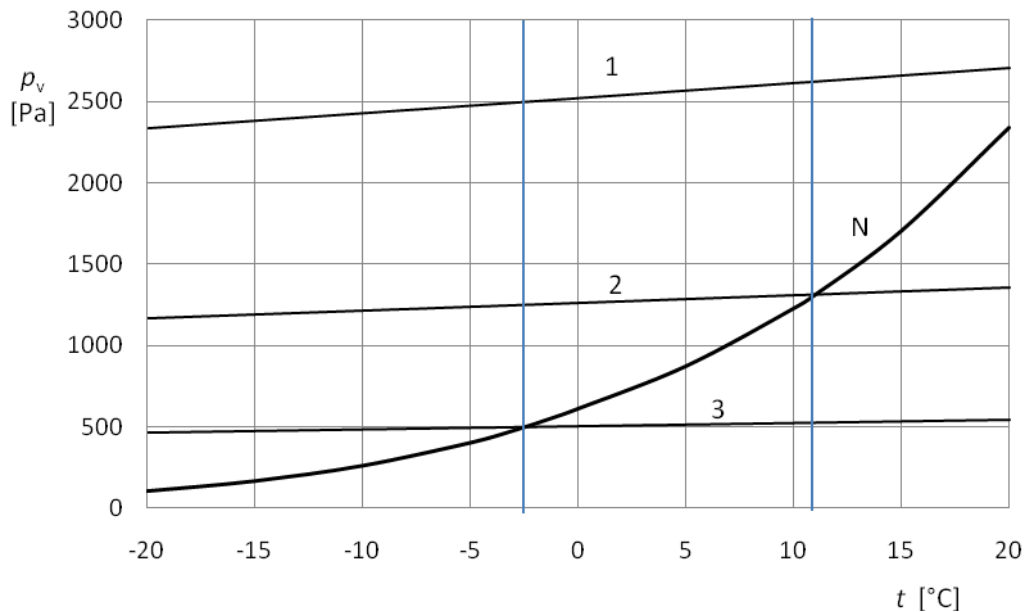
$$m_{N1} = M_m \frac{p_{N1} V_2}{R T_1} = M_m \frac{p_{N1} V_1}{R T_1} \frac{p_1}{p_2} \approx 54 \text{ g.}$$

Vo všetkých troch prípadoch sa voda v nádobe všetka vyparí a v nádobe sa vytvorí para s relatívnou vlhkosťou $\eta_1 \approx 93$ %, $\eta_2 = 46$ %, $\eta_3 = 18,6$ %.

- c) Ak sa vzduch ochladzuje, znižuje sa tlak pary v nádobe a taktiež tabuľkový tlak nasýtenej pary. V okamihu, keď tlak pary dosiahne hodnotu tabuľkového tlaku nasýtenej pary, začne voda v nádobe kondenzovať. Ak tento stav nastane nad teplotou trojného bodu vody, vzniká pri kondenzácii voda a z nej prípadne ľad, ak para dosiahne stav nasýtenia pri teplote nižšej ako je trojný bod vody, dôjde k desublimácii a kondenzát je priamo tuhý (srieň).

Tlak vodnej pary určíme s použitím modelu ideálneho plynu

$$p_v = \frac{m_v}{M} \frac{RT}{V_1} T \quad (1)$$



V grafe je znázornená krivka N nasýtenej pary podľa tabuľky, a priamky podľa vzťahu (1) pre tri zadané hmotnosti vzorky.

Z grafu vidno, že pri izochorickom ochladzovaní začne para v jednotlivých prípadoch:

1. kondenzovať na vodu ihneď, lebo para bola nasýtená
2. kondenzovať na vodu od teploty približne 11 °C
3. kondenzovať na srieň pri teplote približne –2,4 °C.

Pri teplote $t_3 = 5 \text{ °C}$ už vzorky 1 a 2 obsahujú kondenzát a preto je relatívna vlhkosť pary v oboch prípadoch 100 %.

V prípade vzorky 3 je ešte voda v plynnom stave. Nasýtená para má tlak $p_{N3} = 871 \text{ Pa}$. Tlak pary vzorky 3 je pri tejto teplote

$$p_v = \frac{m_v}{M} \frac{RT}{V_1} \approx 514 \text{ Pa.}$$

Relatívna vlhkosť je tak $p_v/p_{N3} = 59 \text{ %}$.

- d) Pri teplote $t_{40} = 5 \text{ °C}$ je tlak nasýtenej pary $p_{N4} = 871 \text{ Pa}$ a hustota pary s vlhkosťou $\eta = 80 \text{ %}$ je

$$\rho_{40} = \eta \frac{M p_{N4}}{RT_{40}} \approx 5,43 \text{ g/m}^3.$$

Pri teplote $t_{41} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ je tlak nasýtenej pary $p_{N1} = 2,34 \text{ kPa}$, čomu zodpovedá hustota pary s relatívnou vlhkosťou 100 % rovná $\rho_{20N} = 17,3 \text{ g/m}^3$.

Pri izobarickom zohriatí vzduchu sa zvýši objem v pomere

$$V_{41}/V_{40} = T_{41}/T_{40}$$

a pri zachovaní obsahu vody sa tak zníži hustota pary

$$\rho_{41} = \rho_{40} \frac{V_{40}}{V_{41}} = \rho_{40} \frac{T_{40}}{T_{41}} \approx 5,15 \text{ g/m}^3.$$

Relatívna hustota zohriateho vzduchu je tak $\eta_{41} \approx 30 \%$, čo predstavuje vzduch pre dýchanie pomerne suchý.

Vetraním sa dostáva do miestnosti vlhký chladný vzduch, ktorý sa však zohriatím v miestnosti stáva suchým – preto pre zdravé prostredie je potrebné v zime umelo zvyšovať vlhkosť vzduchu v obytných priestoroch.

Pozn:

Pre tlak nasýtenej vodnej pary v rozsahu teplôt $-20 \text{ }^\circ\text{C}$ až $30 \text{ }^\circ\text{C}$ možno vyjadriť vzt'ahom

$$p_n = 6,1078 \times 10^{\frac{7,6326t}{241,9+t}} \quad [\text{hPa}, \text{ }^\circ\text{C}]$$

podľa:

http://klud.ics.upjs.sk/turistik/download/geografia/fyzicka_geografia/skripta_meteo/Kemel04_A.doc

Opis vlhkosti vzduchu možno nájsť aj na adrese:

<http://www.fpv.umb.sk/~vzdchem/ChemiaTexty/Fyzika.htm>

6. Halové javy

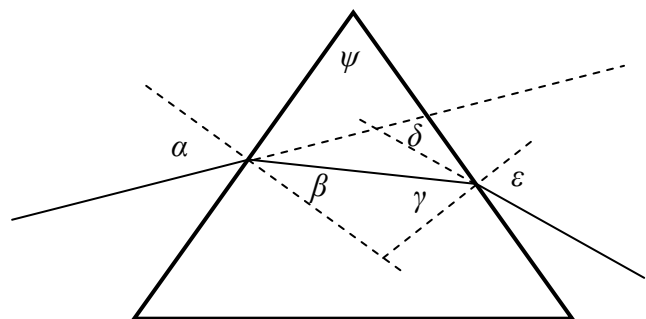
Riešenie:

- a) Kryštáliky sa považujú za pravidelné šesťboké hranoly. Malé halo vzniká tak, že lúč svetla vniká do kryštáliku kolmo na os hranola jednou stenou a vychádza stenou, ktorá zvierá s prvou uhol 60° . Táto hodnota predstavuje lámavý uhol $\psi_1 = 60^\circ$ pre „malé halo“. V druhom prípade vstupuje lúč do kryštáliku podstavou a vychádza jednou z bočných strán. Vtedy vzniká „veľké halo“. Lámavý uhol je v tomto prípade $\psi_2 = 90^\circ$.

- b) Študujeme lom na hranole s daným lámavým uhlom ψ . Znamená to, že lúč vstupuje do hranola vstupnou stenou a vystupuje výstupnou stenou, ktorá so vstupnou zvierá uhol ψ . Tretia stena sa v tomto prípade neuvažuje, je dostatočne vzdialená a chod lúčov neovplyvňuje.

Uvažujme hranol s lámavým uhlom ψ , do ktorého vstupuje lúč pod uhlom α . Do hranola vstúpi lúč pod uhlom β , pre ktorý platí

$$\sin\beta = (\sin\alpha)/n.$$



Na druhú stenu dopadne lúč pod uhlom

$$\gamma = 90^\circ - (180^\circ - \psi - (90^\circ - \beta)) = \psi - \beta.$$

Z hranola vystupuje lúč pod uhlom ε , pre ktorý platí

$$\sin \varepsilon = n \sin \gamma$$

Uhol medzi vystupujúcim a vstupujúcom lúčom je

$$\delta = \alpha - \beta + (\varepsilon - \gamma) = \alpha + \varepsilon - \psi.$$

Hraničný uhol pre výstup lúča z hranola je $\varepsilon = 90^\circ$. Medzný uhol dopadu lúča na povrch hranola je $\alpha = 90^\circ$.

Pre uvedené podmienky platí $\gamma = \arcsin(1/n)$ a $\beta = \arcsin(1/n)$. Pre medzný lámavý uhol hranola dostaneme

$$\psi_m = \gamma + \beta = 2 \arcsin(1/n) \approx 99^\circ.$$

Z výsledku vidno, pre obidva prípady lámavých uhlov $\psi_1 = 60^\circ$ i $\psi_2 = 90^\circ$ existujú lúče, ktoré prechádzajú cez kryštálik. Keďže sú kryštáliky ľadu vo vzduchu náhodne natočené, vždy budú existovať lúče, ktoré splňujú podmienku prechodu cez kryštál pre uvažované geometrické usporiadanie. Tieto lúče vytvárajú „malé halo“ a „veľké halo“.

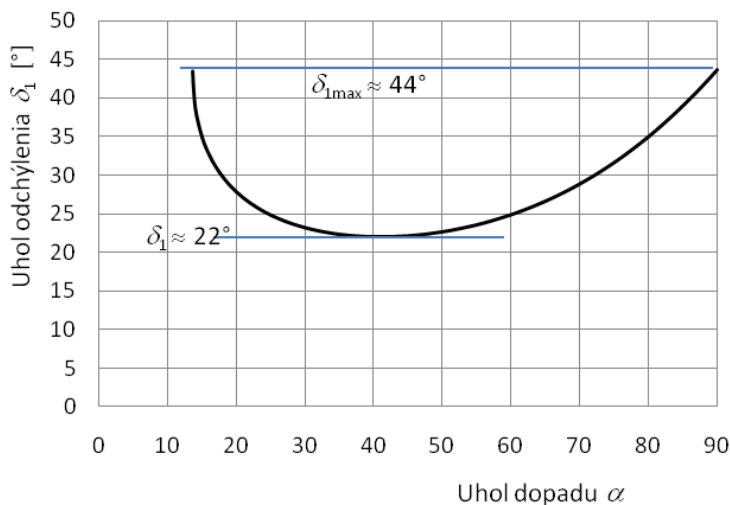
Pre $n > 1$ je prvá podmienka vniku lúča do hranola splnená vždy, nie každý lúč však spĺňa podmienku druhú pre dané hodnoty lámavého uhla hranola ψ .

Pre podmienku výstupu z hranola $\gamma \leq \arcsin(1/n)$ dostaneme medzný uhol $\gamma_m \approx 50^\circ$, pre ktorý dostaneme pre obidva prípady ψ_1 a ψ_2 hraničné uhly $\beta_{m1} = \psi_1 - \gamma_m \approx 10^\circ$ a $\beta_{m2} \approx 40^\circ$ a uhly dopadu $\alpha > \alpha_{m1} = \arcsin(n \sin \beta_{m1}) \approx 13^\circ$ pre prvý prípad a $\alpha > \alpha_{m2} \approx 57^\circ$ pre druhý prípad. Z toho vyplýva, že jav „veľkého halo“ je slabší ako jav „malého halo“.

- c) Z predchádzajúcich vzťahov dostaneme závislosť medzi uhlom α dopadu lúčov na hranol a uhlom δ ich odchylenia od pôvodného smeru šírenia. Nakoľko predpokladáme veľmi vzdialený bodový zdroj svetla, zodpovedá uhol δ polovici vrcholového uhlu kužeľovej plochy, ktorá predstavuje lúče s príslušnou odchýlkou.

$$\delta = \alpha + \arcsin(n \sin \{\psi - \arcsin[(\sin \alpha)/n]\}) - \psi \quad (1)$$

Keďže ide o pomerne zložitý vzťah, je najjednoduchšie závislosť vyjadriť graficky (napr. s použitím programu EXCEL) pre jednotlivé lámavé uhly ψ_1 a ψ_2 .



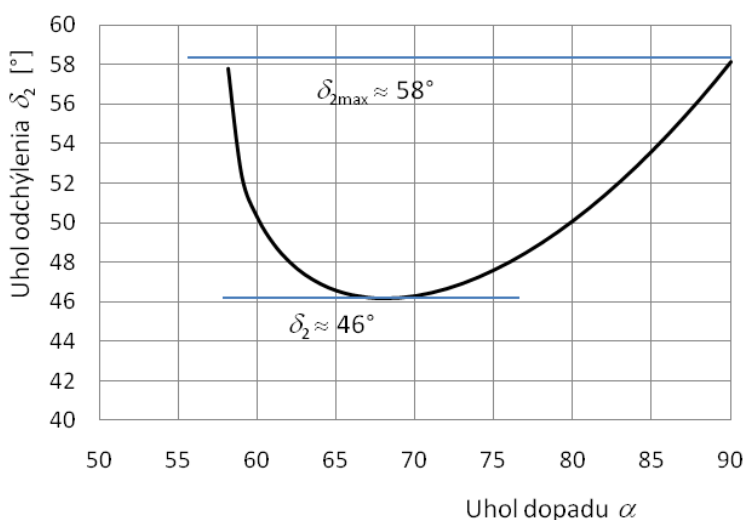
Graf pre $\psi_1 = 60^\circ$

Z grafu vidno, že na vzniku javu sa podieľajú lúče dopadajúce na hranol pod uhlom $\alpha \in (13^\circ; 90^\circ)$. Najväčšia intenzita pozorovaného javu bude pri minimálnom uhle $\delta_1 \approx 22^\circ$, ktorý predstavuje minimum závislosti. K blízkemu okoliu uhla δ_1 prispievajú lúče z veľkého rozsahu uhla α (preto vnútorný okraj svetelného pásu bude najjasnejší). Pozorovaný pás „malého halo“ bude postupne slabnúť až k hraničnému uhlu $\delta_{1 \max} \approx 44^\circ$. Fotografia pozorovaného javu „malé halo“ je na prvom obrázku.



Fotografia „malého halo“ okolo Slnka dňa 5.2.2006 (Autor Miroslav Neuberg).
Zdroj [Hhttp://ukazy.astro.cz/galerie-22halo.php](http://ukazy.astro.cz/galerie-22halo.php)

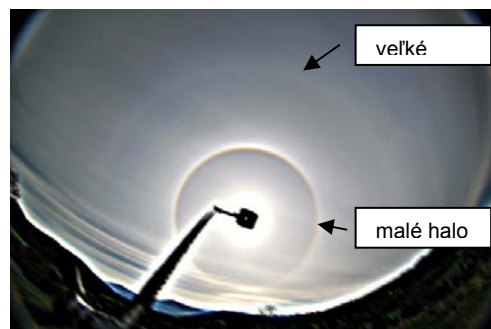
d)



Graf pre $\psi_2 = 90^\circ$

Z druhého grafu vidno, že vnútorný uhol pásu „veľkého halo“ má uhol $\delta_2 \approx 46^\circ$. V okolí tejto hranice je pás najjasnejší a jeho intenzita postupne klesá až hraničnej hodnote $\delta_{2\max} \approx 58^\circ$.

e) Z predchádzajúcich výsledkov teda vidno, že „malé halo“ vytvárajú lúče, ktoré dopadajú na príslušnú stenu hranola pod uhlom dopadu $\alpha \in (13^\circ; 90^\circ)$, čomu zodpovedá uhlová šírka svetelného pásu $\delta \in (22^\circ; 44^\circ)$.



Hveľké haloH spolu s výrazným malým halom na snímke z 21. 4. 2007. (Autor Martin Popek).
Zdroj [Hhttp://ukazy.astro.cz/galerie-46halo.php](http://ukazy.astro.cz/galerie-46halo.php)

Pás „veľkého halo“ vytvárajú lúče, ktoré dopadajú na príslušnú stenu hranola pod uhlom dopadu $\alpha \in (58^\circ; 90^\circ)$, čomu zodpovedá uhlová šírka svetelného pásu $\delta \in (46^\circ; 58^\circ)$. Pri detailnom pozorovaní druhého obrázku možno tušiť aj horné hranice pásov malého a veľkého halo.

Rôzne uhly dopadu α sú dané náhodnou orientáciou kryštálika vo vzduchu a keďže ide o rovnobežné lúče (zo vzdialeného bodového zdroja), sú pozorované kruhové pásy.