Fyzikálna olympiáda

53. ročník, 2011/2012

krajské kolo kategórie B

riešenie úloh

1. Šikmý vrh

Pre šikmý vrh loptičky z bodu O so súradnicami x_0 = 0, y_0 = 0 platia vzťahy

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad x = v_0 t \cos\alpha$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g t \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

a) Ak loptička dopadne na dosku do bodu P ($x_P = d$, $y_P = 0$), platí

$$d = v_0 t_1 \cos\alpha_0 \qquad 0 = v_0 t_1 \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t_1^2 ,$$

odkiaľ dostaneme po vylúčení času t_1 vzťah pre rýchlosť vrhu

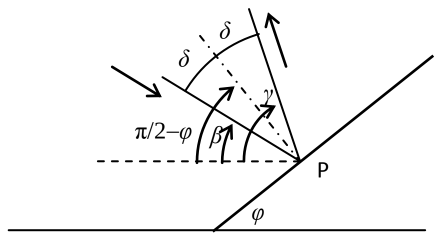
$$v_0 = \sqrt{\frac{g d}{2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}} = \sqrt{\frac{g d}{\sin 2\alpha_0}} . \qquad (1)$$ **2 body**

Minimálna hodnota rýchlosti vrhu zodpovedá maximálnej hodnote výrazu sin $2\alpha_0$, ktorá je rovná jednej pre uhol $\alpha_{01} = \pi/4$ rad = 45°.

Hľadaná rýchlosť $v_{01} = \sqrt{g d}$, pre dané hodnoty $v_{01} \approx 7{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Uvažujeme dopad na dosku v bode P: $x_P = d$, $y_P = 0$.

Pri dopade loptičky má vektor rýchlosti veľkosť v_{02} rovnú rýchlosti vrhu a s vodorovnou rovinou zviera uhol $\beta_{02} = \alpha_{02}$ (trajektória je symetrická okolo zvislej osi prechádzajúcej jej najvyšším bodom). Uhol dopadu na šikmú plochu (meraný od kolmice) je $\delta = \pi/2 - \varphi - \beta_{02}$ (obr. RB–1). Uhol vrhu po odraze je $\gamma_{02} = \beta_{02} + 2\delta$. Dolet smerom nazad vo vodorovnej rovine je podľa (1)



Obr. RB–1

$$d^* = \frac{v_{02}^2}{g} \sin 2\gamma_{02} .$$

Pre návrat do bodu vrhu O musí platiť $d^* = d$, tzn. sin $2\gamma_{02}$ = sin $2\alpha_{02}$. To vedie na všeobecný vzťah $2\gamma_{02} = \pi - 2\alpha_{02}$.

Po dosadení dostaneme podmienku $\varphi = \pi/4$ rad. **2 body**

loptička sa môže vrátiť po odraze do bodu O iba ak má doska uhol sklonu $\varphi = \pi/4$rad.

Pre zvyšné uhly podľa zadania sa loptička po odraze od dosky do bodu O nevráti.

Pre uhol sklonu $\varphi = \pi/4$ rad je uhol vrhu podľa (1)

$$\sin 2\alpha_{02} = \frac{g d}{v_{02}^2} = \left(\frac{v_{01}}{v_{02}}\right)^2 ,$$

odkiaľ dostaneme dve riešenia

$$\alpha_{02}^{(1)} = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{v_{01}}{v_{02}}\right)^2 ,$$ pre dané hodnoty $\alpha_{02}^{(1)} \approx 0{,}230$ rad ≈ 13,2° **2 body**

$$\alpha_{02}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\pi - \arcsin \left(\frac{v_{01}}{v_{02}}\right)^2\right],$$ pre dané hodnoty $\alpha_{02}^{(2)} \approx 1{,}34$ rad ≈ 76,8°. **2 body**

2. Kmity ortuťového stĺpca

a) Ak sa ortuťové teleso posunie o x, je rozdiel hladín v stĺpcoch $2x$. Na ortuťové teleso tak pôsobí výsledná sila $F_1 = S\,2x\,\rho g$, kde $S = \pi d^2/4$. Táto sila je priamo úmerná výchylke a pôsobí proti smeru výchylky $F_1 = -k_1 x$. Takáto sila vyvolá kmitavý pohyb s harmonickou časovou závislosťou.

2 body

Sila F_1 udeľuje ortuťovému telesu zrýchlenie $a = F_1/m$. Zrýchlenie harmonického pohybu $a = -\omega_1^2 x$, kde $\omega_1 = 2\pi / T_1$.

Pre periódu kmitov dostaneme vzťah

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{\rho g \pi d^2}}$$, pre dané hodnoty $T_1 \approx 0{,}436$ s **2 body**

b) Ak je jeden koniec uzatvorený, dochádza ku kompresii alebo expanzii vzduchu, pre ktorú platí stavová rovnica

$$p_0 V_0^{\kappa} = p V^{\kappa},$$

pričom $V_0 = S\,h$ a $V = S\,(h - x)$. Pre rozdiel tlakov na hladinách v ramenách trubice platí

$$p_2 = p - p_0 = p_0\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa} - 1\right] = p_0\left[\left(\frac{h}{h-x}\right)^{\kappa} - 1\right] = p_0\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-\kappa} - 1\right].$$ **1 bod**

Pre $x << h$ použijeme približný vzťah $(1 - y)^{-\kappa} \approx 1 + \kappa y$, pre $y = x/h << 1$,

$$p_2 = \kappa p_0 x / h.$$

Proti výchylke ortuťového telesa pôsobí celková sila

$$F_2 = -2S\,x\,\rho g - \kappa S\,p_0\,x/h = -\frac{\pi d^2}{4}\left(2\rho g + \frac{\kappa p_0}{h}\right)x = -k_2\,x.$$

Výsledná sila je opäť priamo úmerná výchylke a vyvolá kmity s periódou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{\pi d^2}\frac{m}{2\rho g + \frac{\kappa p_0}{h}}}$$

Po úprave

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\pi d^2 \rho g}{2}}}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\kappa p_0}{2\rho g h}}} = T_1\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\kappa p_0}{2\rho g h}}}$$

Pre dané hodnoty $T_2/T_1 \approx 0{,}394$. **2 body**

c) V treťom prípade sa mení tlak vzduchu v obidvoch ramenách. Rozdiel tlakov

$$p_3 = p^+ - p^- = p_0\left[\left(\frac{h}{h-x}\right)^{\kappa} - \left(\frac{h}{h+x}\right)^{\kappa}\right] = p_0\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-\kappa} - \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{-\kappa}\right].$$ **1 bod**

S použitím približného vzťahu dostaneme

$$p_2 = 2\kappa p_0 x / h.$$

Rovnakým postupom ako v prechádzajúcom prípade dostaneme

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\pi d^2 \rho g}{2}}}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\kappa p_0}{\rho g h}}} = T_1\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\kappa p_0}{\rho g h}}}.$$

Pre dané hodnoty $T_3/T_1 \approx 0{,}290$. **2 body**

3. Elektrické vedenie

a) Ak k článku pripojíme rezistor s odporom R_0, ktorý reprezentuje nekonečné vedenie, je vstupný odpor tiež R_0 a teda platí

$$R_{\mathrm{vst}} = R_{\mathrm{L}} + \frac{R_{\mathrm{T}} R_0}{R_{\mathrm{T}} + R_0} = R_0 \ ,$$

odkiaľ dostaneme

$$R_0^2 - R_{\mathrm{L}} R_0 - R_{\mathrm{L}} R_{\mathrm{T}} = 0 \text{ a odtiaľ } R_0 = \frac{R_{\mathrm{L}}}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{L}}}}\right). \quad (1)$$

2 body

b) Článok predstavuje delič napätia

$$p_U = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{R_{\mathrm{T}} R_0}{R_{\mathrm{T}} + R_0}}{R_{\mathrm{L}} + \dfrac{R_{\mathrm{T}} R_0}{R_{\mathrm{T}} + R_0}} = \frac{R_0 - R_{\mathrm{L}}}{R_0} = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{4 R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{L}}}} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{4 R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{L}}}} + 1}$$

2 body

Pomer p_U napätí a pomer p_I prúdov je rovnaký a nezávisí od pozície príslušného elementu.

Na výstupe n–tého článku je napätie

$$\frac{U_n}{U_0} = p_U^n = \left(\frac{\sqrt{1 + \dfrac{4 R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{L}}}} - 1}{\sqrt{1 + \dfrac{4 R_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{L}}}} + 1}\right)^n . \quad (2)$$

2 body

c) S využitím vzťahov (1), (2), $R_0 = U_0/I_0$ a $N = I_N/\Delta I$ dostaneme

Charakteristický odpor vedenia $R_0 = 7{,}0\ \Omega$.

$$R_{\mathrm{L}} = R_0\left(1 - \sqrt[n]{\frac{U_n}{U_0}}\right)$$, pre dané hodnoty $R_{\mathrm{L}} \approx 0{,}191\ R_0 \approx 1{,}34\ \Omega$. **2 body**

$$R_{\mathrm{T}} = R_0\left(\frac{R_0}{R_{\mathrm{L}}} - 1\right) = \frac{U_0}{I_0}\,\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{U_0}{U_n}} - 1}$$, pre dané hodnoty $R_{\mathrm{T}} \approx 4{,}23\ R_0 \approx 29{,}6\ \Omega$. **2 body**

4. Nabitá guľa

a) V okolí gule s nábojom Q je elektrické pole, ktorého intenzita a potenciál sú dané vzťahmi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{a} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} ,$$

kde r je vzdialenosť bodu od stredu gule (r R, R je polomer gule).

Intenzita dosahuje maximálnu hodnotu na povrchu gule. Pre medznú hodnotu E_{p} je potenciál

$\varphi_{\mathrm{m}} = R\,E_{\mathrm{p}}$, pre dané hodnoty $\varphi_{\mathrm{m}} \approx 4{,}5$ MV. **1 bod**

b) Pri nabití gule na potenciál φ_{m} sa na guli nahromadí náboj

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\,\varphi .$$

Čas nabíjania je $t_{\mathrm{n}} = \dfrac{Q}{I} = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R^2 E_{\mathrm{p}}}{I}$, pre dané hodnoty $t_{\mathrm{n}} \approx 75$ s. **1 bod**

c) Energia nabitého telesa je

$$E_C = \frac{1}{2} C \varphi_n^2 \text{, kde } C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R \text{ je kapacita gule.}$$

Pre maximálnu intenzitu poľa dostaneme

$$E_C = \frac{1}{2}(4\pi\varepsilon_0 R)\left(R E_p\right)^2 = 2\pi\varepsilon_0 R^3 E_p^2 \text{, pre dané hodnoty } E_C \approx 1{,}69 \text{ kJ.}$$ **2 body**

d) V objeme V sa nachádza počet atómov $N_V = \frac{m}{M_m} N_A = \frac{\rho V}{M_m} N_A$.

Koncentrácia voľných elektrónov $n = \frac{N_V}{V} = \frac{\rho}{M_m} N_A$, pre dané hodnoty $n \approx 8{,}48\times10^{28}\ \text{m}^{-3}$.

Na jeden atóm pripadá objem $v = V / N_V = 1/n$.

Dĺžka a hrany kocky s objemom v

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{\frac{M_m}{\rho N_A}} \approx 2{,}28\times10^{-10} \text{ m.}$$ **2 body**

e) Na plochu povrchu s obsahom S tak pripadá počet povrchových atómov

$$N_p = \frac{\Delta V}{a^3} = \frac{S a}{a^3} = 4\pi R^2 \left(\frac{\rho N_A}{M_m}\right)^{2/3}.$$ Pre dané hodnoty $N_S \approx 5{,}45\times10^{20}$. **2 body**

f) Ak nabijeme vodivú guľu na náboj Q, zodpovedajúci počet elektrónov je

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2 E_p}{e}.$$ Pre dané hodnoty $N \approx 4{,}69\times10^{15}$. **1 bod**

Jeden elektrón dodaný nabíjaním na potenciál φ_m pripadá na N_1 povrchových atómov, pričom

$$N_1 = \frac{N_p}{N} = \frac{e}{\varepsilon_0 E_p}\left(\frac{\rho N_A}{M_m}\right)^{2/3} \approx 1{,}16\times10^5.$$ **1 bod**

Z výsledku je zrejmé, že nabitie gule neovplyvní významne počet voľných elektrónov v povrchovej vrstve.

53. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 3, 4), Dušan Nemec (2)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, 2012