

## Fyzikálna olympiáda

54. ročník, 2012/2013

celoštatné kolo

kategória A – riešenie úloh

### 1. Štvorstupňový katapult

Riešenie:

a) Pri zrážke sa uplatní ZZH

$$m_A v_{A0} + m_B v_{B0} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}$$

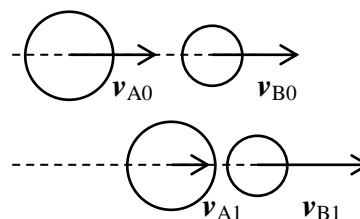
a ZZME (rovnosť kinetickej energie pred zrážkou a po nej pri pružnej zrážke)

$$\frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2.$$

Z rovníc dostaneme po úprave

$$v_{A1} = \frac{p-1}{p+1} v_{A0} + \frac{2}{p+1} v_{B0} \quad (\text{A})$$

$$v_{B1} = \frac{2p}{p+1} v_{A0} - \frac{p-1}{p+1} v_{B0} \quad (\text{B})$$



Obr. AR3-1

**Obrázok 1 bod**

**Vzťahy 2 body**

b) Pri páde na seba gule vzájomne nepôsobia. Ak sa dotkne prvá guľa podložky, dochádza k jej deformácii na spodnej strane a prudkému zabrzdzeniu. Pri pružnej deformácii sa guľa odrazí nazad s rovnakou rýchlosťou a súčasne dochádza k oneskorenej deformácii na hornej časti tlakom druhej gule. Ak uvažime, že deformačná fáza je veľmi krátka (niekoľko  $\mu\text{s}$ ), považujeme oneskorenie deformácie na hornej strane za dostatočné pre splnenie predpokladu o postupnosti deformácie – prvá guľa s rýchlosťou  $-v_0$  po odraze narazí do gule (2) klesajúcej nadol rýchlosťou  $v_0$ . Tento predpoklad je splnený tým lepšie, čím je väčší modul pružnosti v tlaku – vhodné je použitie oceľových gúľ.

S použitím vzťahu (A) dostaneme rýchlosť gule (1) po zrážke smerom nahor

$$v_1 = \frac{p-1}{p+1} v_0 + \frac{2}{p+1} (-v_0) = \frac{p-3}{p+1} v_0.$$

Guľa (2) má po zrážke rýchlosť podľa (B)

$$v_{20} = \frac{2p}{p+1} v_0 - \frac{p-1}{p+1} (-v_0) = \frac{3p-1}{p+1} v_0.$$

Rovnaký dej predpokladáme na kontakte gúľ (2) a (3), atď.

Druhá guľa potom narazí rýchlosťou  $v_{20}$  do gule (3) padajúcej s rýchlosťou  $v_0$ . Výsledná rýchlosť gule (2) je podľa (A)

$$v_2 = \frac{p-1}{p+1} v_{20} + \frac{2}{p+1} (-v_0) = \frac{(p-1)(3p-1) - 2(p+1)}{(p+1)^2} v_0 = v_1 + 2v_0 \left( \frac{p-1}{p+1} \right)^2 > v_1.$$

Druhá guľa získa rýchlosť  $v_2 > v_1$  a teda pri stúpaní predbehne guľu (1) a bez ďalšej zrážky a guľou (1) stúpa nahor. Keďže analogicky po ďalšom odraze guľ (3) a (2) platí  $v_3 > v_2$ , vystúpi guľa (2) bez prekážky do výšky  $h_2 = v_2^2/(2g)$ .

Tretia guľa získa rýchlosť podľa (B)

$$v_{30} = \frac{2p}{p+1}v_{20} - \frac{p-1}{p+1}(-v_0) = \left( \frac{8p^2}{(p+1)^2} - 1 \right) v_0.$$

Po náraze do gule (4) získa guľa (3) rýchlosť  $v_3 > v_2$  a guľa (4)

$$v_{40} = \frac{2p}{p+1}v_{30} - \frac{p-1}{p+1}(-v_0) = \left\{ \frac{2p}{p+1} \left[ \frac{8p^2}{(p+1)^2} - 1 \right] + \frac{p-1}{p+1} \right\} v_0. \quad (C)$$

**Vzťahy pre  $v_{01}$  až  $v_{04}$  – 3 body**

c) Gule nadobudnú výšky

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \left( \frac{p-3}{p+1} \right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = \left( \frac{p-3}{p+1} \right)^2 h_0.$$

Pre dané hodnoty pri  $p = 3,0$  je  $h_1 = 0$  – guľa sa nárazom do gule (2) zastaví,

pri  $p = 5,0$  dostaneme  $h_1 \approx 0,11 h_0 \approx 5,6$  cm.

$$h_4 = \frac{v_{40}^2}{2g} = \left\{ \frac{2p}{p+1} \left[ \frac{8p^2}{(p+1)^2} - 1 \right] + \frac{p-1}{p+1} \right\}^2 h_0.$$

Pre dané hodnoty pri  $p = 3,0$  je  $h_4 \approx 33 h_0 \approx 16,5$  m.

Pri pomere  $p = 5,0$  dostaneme  $h_4 \approx 68 h_0 \approx 34$  m.

**3 body**

d) S použitím vzťahu (C)

$$h^* = \frac{v_z^2}{2g} \left\{ \frac{2p}{p+1} \left[ \frac{8p^2}{(p+1)^2} - 1 \right] + \frac{p-1}{p+1} \right\}^{-2}, \text{ pre dané hodnoty } h^* \approx 28 \text{ m.}$$

Zostava guľ by mala hmotnosť 9,3 kg.

**1 bod**

## 2. Fokusácia nabitých častíc

Riešenie:

- a) Na časticu pôsobí v magnetickom poli sila  $\mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Rýchlosť pohybu častice rozložíme na zložku  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$  rovnobežnú s vektorom  $\mathbf{B}$  a zložku  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  kolmú na smer vektora  $\mathbf{B}$ . V pozdĺžnom smere je sila  $F_{\parallel} = 0$ , a preto je pohyb v pozdĺžnom smere rovnomerný s rýchlosťou  $v_{\parallel}$ .

V priečnom smere pôsobí na časticu sila  $F_{\perp} = Q v_{\perp} B$  kolmá na smer pohybu, tzn. pohyb je rovnomerný s konštantnou rýchlosťou  $v_{\perp}$  a sila je dostredivá  $Q v_{\perp} B = m v_{\perp}^2 / R$ .

Skladaním pozdĺžneho rovnomerného pohybu a priečného rovnomerného pohybu po kružnici dostaneme rovnomerný pohyb po skrutkovici s osou rovnobežnou so smerom vektora  $\mathbf{B}$ . **1 bod**

$$\text{Polomer krivosti v priečnom smere } R = \frac{m v_{\perp}}{Q B} = \frac{m v}{Q B} \sin \alpha$$

je konštantný a preto ide o rovnomerný pohyb po kružnici.

Pre dané hodnoty  $R = 0,50 \text{ mm}$  pre  $\alpha = 1,0^\circ$ ,  $R = 7,4 \text{ mm}$  pre  $\alpha = 15^\circ$ . **1 bod**

$$\text{Uhlová frekvencia tohto pohybu je } \omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{Q B}{m},$$

pre dané hodnoty  $\omega = 1,75 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ . **1 bod**

$$\text{Stúpanie skrutkovice } h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{Q B} v \cos \alpha.$$

Pre dané hodnoty  $h = 0,179 \text{ m}$  (pre  $\alpha = 1,0^\circ$ ),  $h = 0,173 \text{ m}$  (pre  $\alpha = 15^\circ$ ) **1 bod**

- b) Ak vstupujú častice do priestoru spektroskopu kolmo na  $x$ , prekonajú polkruhový oblúk, tzn.

$$x_0 = 2R = \frac{2v}{B} \frac{m}{Q},$$

pre dané hodnoty  $x_0 = 5,7 \text{ cm}$ . **1 bod**

Pri odchýlke vektora rýchlosti o uhol  $\beta$  sa častica pohybuje pozdĺž kružnicového oblúka s polomerom  $R$ , ale vzdialenosť  $x_m < x_0$ , obr. RA3–2.

$$x_m = 2 R \cos \beta.$$

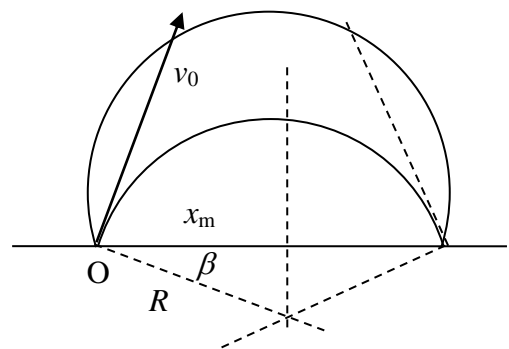
Pre odchýlku  $-\beta$  dostaneme rovnaké miesto dopadu (stredový uhol oblúkov je vzájomne doplnkový do  $360^\circ$ ).

Šírka stopy je

$$\Delta x = x_0 - x_m = 2 R (1 - \cos \beta) = x_0 (1 - \cos \beta) = \frac{2v}{B} \frac{m}{Q} (1 - \cos \beta),$$

pre dané hodnoty  $\Delta x = 5,2 \text{ mm}$ . **2 body**

- c) V tomto prípade sa elektróny pohybujú po skrutkovici. Podľa výsledku časti a) stúpanie skrutkovice nezávisí pre  $\alpha \ll 1 \text{ rad}$  od uhlu  $\alpha$  a je rovné



Obr. RA3–2

$$h_0 = \frac{2\pi v m}{B Q}.$$

Stúpanie skrutkovice vychádza z podmienky periodicity priečného pohybu, čo znamená, že v rovine  $y$  vzdialenej  $h_0$  od zdrojovej roviny  $x$  sa elektróny sústreďujú do jedného bodu.

Ak je uhol  $\alpha$  odchýlky emitovaného elektrónu od osi  $z$  väčší, je situácia zložitejšia. Pri vzdialenosti rovín  $z$  je čas pohybu elektrónu medzi rovinami

$$t = \frac{z}{v \cos \alpha}.$$

Za tento čas prejde v priečnom priemete oblúk so stredovým uhlom, obr. RA3–3,

$$\varphi = \omega t = \frac{QB}{m} \frac{z}{v \cos \alpha}.$$

Pre  $\alpha \ll 1$  rad a teda  $\cos \alpha \approx 1$  je pre  $\varphi = 2\pi n$  rad

$$z_0 = n \frac{2\pi v m}{B Q}, \text{ kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Pre dané hodnoty  $z_{01} = 17,9$  cm.

**1 bod**

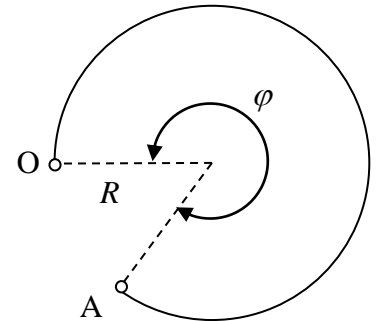
Vzdialenosť krajných bodov oblúka OA, ktorá predstavuje polomer stopy  $r$  elektrónov s uhlom odchýlky  $\alpha$

$$r = 2R \left| \sin(\varphi/2) \right| = 2 \frac{mv \sin \alpha}{QB} \sin \left( \frac{QB}{2m} \frac{z}{v \cos \alpha} \right).$$

Pre  $z = z_{01}$

$$r = \frac{2v \sin \alpha}{B} \left( \frac{m}{Q} \right) \left| \sin \left( \frac{\pi}{\cos \alpha} \right) \right|,$$

pre dané hodnoty  $r = 4,8 \times 10^{-7}$  m (pre  $\alpha = 1^\circ$ ),  $r = 1,63$  mm (pre  $\alpha = 15^\circ$ ). **2 body**



Obr. RA3–3

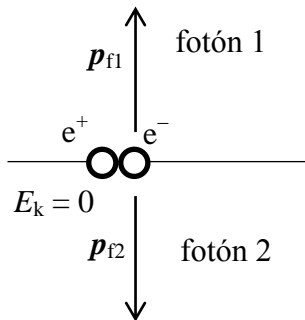
### 3. PET – pozitronová emisná tomografia

Riešenie:

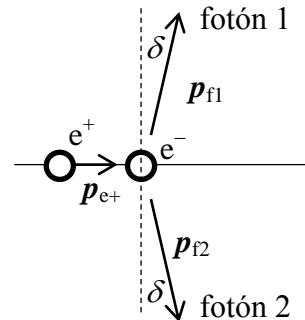
- a) Hybnosť sústavy pozitron – elektrón krátko pred zrážkou je v tomto prípade nulová. Podľa zákona zachovania hybnosti musí byť i celková hybnosť vznikajúcich fotónov nulová, čo nemôže splniť jeden fotón. Vznikajú preto dva fotóny s navzájom opačne orientovaným a rovnako veľkým vektorom hybnosti, tzn. fotóny majú rovnakú veľkosť hybnosti (a teda aj energiu) a navzájom opačný smer pohybu. **1 bod**

Ilustračný obrázok A3–4

**1 bod**



Obr. RA3–4



Obr. RA3–5

Zo zákona zachovania energie vyplýva, že energia častíc pred zrážkou je rovná energii po zrážke. Celková energia sústavy elektrón – pozitron je v tomto prípade je

$$E_0 = 2 m_e c^2.$$

Energia jednotlivých fotónov

$$E_{f0} = \frac{hc}{\lambda_{f0}} = \frac{E_0}{2} = m_e c^2, \text{ pre dané hodnoty } E_{f0} \approx 8,19 \times 10^{-14} \text{ J} \approx 510 \text{ keV.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Vlnová dĺžka fotónov

$$\lambda_{f0} = \frac{h}{m_e c} = \frac{2hc}{E_0}, \text{ pre dané hodnoty } \lambda \approx 2,4 \times 10^{-12} \text{ m} = 2,4 \text{ pm.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- b) Relativistická hmotnosť pozitronu

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2} = \frac{m_e c^2 + E_k}{c^2}.$$

Rýchlosť pohybu pozitronu krátko pred zrážkou

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_k} \right)^2}, \text{ pre dané hodnoty } v \approx 0,195 c \approx 5,8 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Ak sa pozitron v okamihu pred anihiláciou pohyboval a mal kinetickú energiu  $E_k$ , celková energia sústavy  $E_1 = E_0 + E_k = 2m_e c^2 + E_k$ . Vlnová dĺžka vzniknutých fotónov

$$\lambda_{f1} = \frac{2hc}{E_1} = \frac{2hc}{2m_e c^2 + E_k}, \text{ pre dané hodnoty } \lambda_{f1} \approx 2,4 \times 10^{-12} \text{ m} = 2,4 \text{ pm.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Zložka hybnosti fotónov v smere pôvodného pohybu pozitronu je rovná hybnosti pozitronu pred zrážkou.

$$2p_{f1} \sin \delta = 2 \frac{E_{f1}}{c} \sin \delta = p_{e^+} = m v = \frac{1}{c} \sqrt{(m_e c^2 + E_k)^2 - m_e^2 c^4},$$

odkiaľ dostaneme

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{(m_e c^2 + E_k)^2 - m_e^2 c^4}}{2m_e c^2 + E_k}, \text{ pre dané hodnoty } \delta \approx 5,6^\circ. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Ilustračný obrázok RA3–5

**1 bod**

c) Premena rádioaktívnej látky sa uskutočňuje podľa exponenciálneho zákona

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde  $N$  je počet nepremených častíc v čase  $t$  a  $N_0$  v čase  $t = 0$ ,  $\lambda$  je koeficient premeny.

Polčas premeny  $T$  je čas, za ktorý sa premení polovica častíc

$$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}, \text{ odkiaľ } \lambda = \frac{1}{T} \ln 2.$$

Aktivita vzorky, tzn. počet premien za jednotku času,

$$n = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \frac{\ln 2}{T} N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

V čase  $t = 0$  bezprostredne po výrobe vzorky

$$n_1 = \frac{\ln 2}{T} N_0, \text{ pre dané hodnoty } n_1 \approx 1,1 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Po uplynutí času  $t_2 = 6,0$  hod

$$n_2 = \frac{\ln 2}{T} N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t_2}, \text{ pre dané hodnoty } n_2 \approx 1,1 \times 10^{20}.$$

Vidíme, že relatívny pokles aktivity vzorky je  $p \approx 1/10$ .

**1 bod**

**4. SONAR**

Riešenie:

- a) Za čas  $\tau_0$  ponorka prejde vzdialenosť  $v_h \tau_0$ . Dráha zvuku je  $c \tau_0 = \sqrt{4h^2 + v^2 \tau_0^2}$ , obr. RA3-6. Z tohto výrazu máme

$$h = \frac{\tau_0}{2} \sqrt{c^2 - v^2}, \text{ pre dané hodnoty } h \approx 600 \text{ m.}$$

**2 body**Ak neuvažujeme pohyb ponorky ( $v = 0$ ), je

$$h^* = c \frac{\tau_0}{2}.$$

$$\text{Relatívna chyba } \delta = \frac{h^* - h}{h} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

pre dané hodnoty  $\delta \approx 3,2 \times 10^{-3} \%$ . Chyba je zanedbateľne malá.

- b) Keďže sa perióda prijatých signálov predlžuje, zväčšuje sa dráha zvukových signálov. Z toho vyplýva, že dno v smere pohybu ponorky klesá.

**1 bod**Odraz od šikmého dna je znázornený na obr. RA3-2, pričom podľa výsledku časti a) uhol  $\beta$  je veľmi malý.Ak vyšle Sonar dva impulzy s časovým odstupom  $T_0$ , prídu na dno s odstupom

$$T_1 = T_0 + \frac{v T_1 \sin \alpha}{c}, \text{ odkiaľ } T_1 = T_0 \frac{c}{c - v \sin \alpha}.$$

Ak sa impulzy s odstupom  $T_1$  odrazia nazad, je odstup po dopade na Sonar

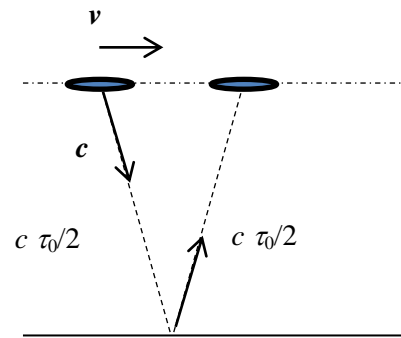
$$T_2 = T_1 + \frac{v T_1 \sin \alpha}{c}, \text{ odkiaľ } T_2 = T_1 \frac{c + v \sin \alpha}{c} = T_0 \frac{c + v \sin \alpha}{c - v \sin \alpha}$$

Rozdiel periód (Dopplerov jav)

$$\Delta T = T_2 - T_0 = T_0 \left( \frac{c + v \sin \alpha}{c - v \sin \alpha} - 1 \right) = T_0 \frac{2v \sin \alpha}{c - v \sin \alpha} \approx \frac{2v \sin \alpha}{c} T_0$$

Odtiaľ dostaneme uhol sklonu dna

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{c}{2v} \frac{\Delta T}{T_0} \right), \text{ pre dané hodnoty } \alpha \approx 11^\circ.$$

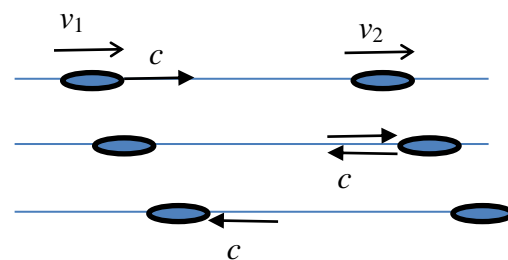


Obr. RA3-6

- c) Uvažujme rýchlosti ponoriek  $v_1$  a  $v_2$  podľa obr. RA3-3.

Po vyslaní dvoch impulzov s odstupom  $T_0$  je odstup pri dopade na druhú ponorku

$$T_1 = T_0 - \frac{v_1 T_0}{c} + \frac{v_2 T_1}{c}, \text{ odkiaľ}$$

**2 body**

Obr. RA3-3

$$T_1 = T_0 \frac{c - v_1}{c - v_2}.$$

Po odraze nazad je odstup na Sonare

$$T_2 = T_1 + \frac{v_2 T_1}{c} - \frac{v_1 T_2}{c}, \text{ odkiaľ } T_2 = T_1 \frac{c + v_2}{c + v_1} = T_0 \frac{c - v_1}{c - v_2} \frac{c + v_2}{c + v_1}.$$

Rozdiel frekvencií so zjednodušením pre  $v_1, v_2 \ll c$

$$\Delta f = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} = f_0 \left( \frac{c + v_1}{c + v_2} \frac{c - v_2}{c - v_1} - 1 \right) = f_0 \frac{2c(v_1 - v_2)}{(c + v_2)(c - v_1)} \approx f_0 \frac{2(v_1 - v_2)}{c}$$

Ide o Dopplerov jav (pohybujú sa zdroj zvuku i prijímač).

$$v_2 \approx v_1 - \frac{\Delta f}{2f_0} c, \text{ pre dané hodnoty } v_2 \approx -14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Druhá ponorka sa pohybuje v smere k prvej rýchlosťou  $14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**4 body**

*Fyzikálna olympiáda, 54. ročník 2012/13 – Celoštátne kola kategórie A*

Autori úloh: (1) Daniel Klivanec, (2) Ľubomír Mucha, (3) Ivo Čáp, (4) Ľubomír Konrád – Dušan Nemeč

Recenzia: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakčná úprava: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013