

Fyzikálna olympiáda

54. ročník, 2012/2013

celoštatné kolo

kategória A

1. Štvorstupňový katapult

Štyri homogénne a dokonale pružné gule sú uložené tak, že ich ťažiská sa nachádzajú na jednej zvislej priamke a susedné gule sa navzájom dotýkajú, obr. A3-1. Pre pomer hmotností gúľ platí vzťah $m_i/m_{i+1} = p > 1$, $i = 1, 2, 3$. Zostavu gúľ necháme voľne padať z výšky $h_0 = 50$ cm na vodorovnú dokonale pružnú dosku s hmotnosťou $M \gg m_1$. Po dopade zostavy dôjde k postupnému odrazu gúľ zvislo nahor. Stredy gúľ zostávajú počas celého deja na spoločnej zvislej priamke.

Najprv riešte prípad pružnej stredovej zrážky dvojice gúľ A a B s pomerom hmotností $m_A/m_B = p$, ktoré sa pred zrážkou pohybovali pozdĺž priamky prechádzajúcej ich stredmi s rýchlosťami v_{A0} a $v_{B0} < v_{A0}$.

a) Odvodte vzťahy pre rýchlosti v_{A1} a v_{B1} gúľ po zrážke. Situáciu znázornite pomocou vhodného obrázku. Predpokladajte, že v tomto prípade je sústava dvojice gúľ izolovaná.

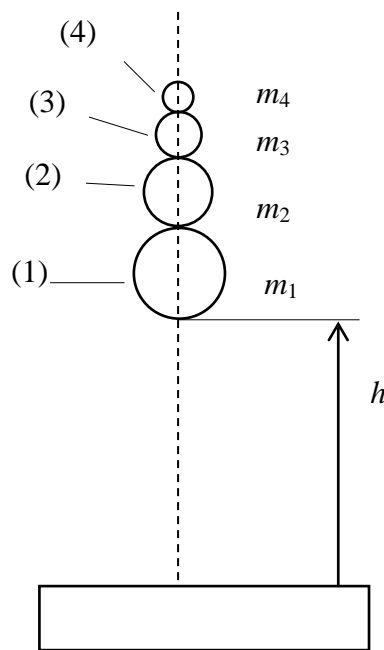
V nasledujúcej časti riešte prípad odrazu sústavy gúľ podľa obr. A3-1 od vodorovnej podložky.

b) S použitím výsledkov časti a) odvodte vzťahy pre okamžitú rýchlosť v_i jednotlivých gúľ tesne po ich odraze smerom nahor. Pri riešení predpokladajte, že zrážky gúľ nastávajú postupne. Jednotlivé kroky postupu riešenia a oprávnenosť uvedeného predpokladu stručne slovne zdôvodnite.

c) Určte výšky h_1 a h_4 , do ktorých vystúpia po odraze najväčšia a najmenšia guľa za uvedených podmienok pre dve hodnoty pomeru hmotností $p_1 = 3,0$ a $p_2 = 5,0$. (Polomery gúľ považujte vzhľadom na výšku h_4 za veľmi malé).

d) Z akej výšky h^* by sme museli nechať padať zostavu gúľ s hodnotou pomeru hmotností $p_3 = 10$, aby najmenšia guľa s hmotnosťou rovnou hmotnosti náboja do pištole $m = 8,4$ g dosiahla po odraze rýchlosť rovnú rýchlosti projektilu v ústí hlavne $v = 260 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Akú hmotnosť by mala v tomto prípade celá zostava gúľ?

Tiažové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

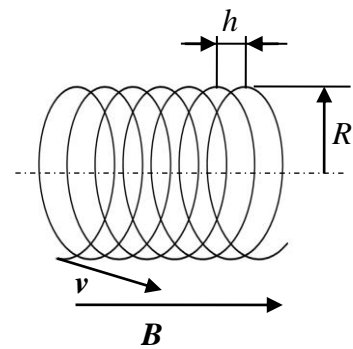


Obr. A3-1

2. Fokusácia zväzku nabitých častíc

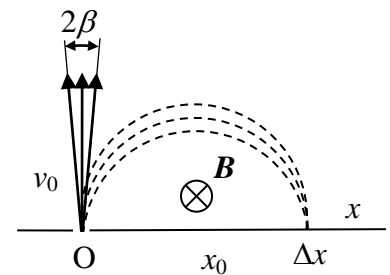
V niektorých elektronických zariadeniach sa využíva zaostrovanie zväzku nabitých častíc magnetickým poľom.

- a) Častica s hmotnosťou m a nábojom Q vnikne rýchlosťou v do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou B . Vektory B a v zvierajú uhol α . Dokážte, že častica sa v magnetickom poli pohybuje rovnomerným pohybom po skrutkovici s osou rovnobežnou so smerom vektora B , obr. A3–2, a určte polomer R , stúpanie h skrutkovice a uhlovú frekvenciu ω pričného pohybu častice (priemetu pohybu do roviny kolmej na os skrutkovice).



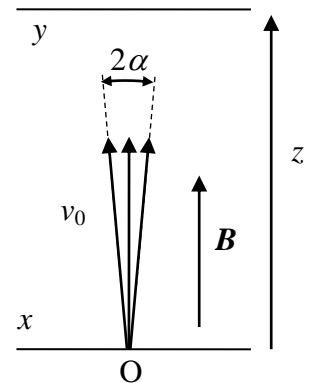
Obr. A3–2

- b) V hmotnostnom spektroskope vniká zväzok častíc kolmo do priestoru homogénneho magnetického poľa úzkou štrbinou, obr. A3–3. Častice majú rovnakú veľkosť rýchlosti v a rozptylový uhol zväzku je 2β okolo smeru kolmého na x . Smer vektora B je rovnobežný so smerom štrbiny. Šírku štrbiny považujeme za veľmi malú. Určte vzdialenosť x_0 stopy častíc s daným pomerom m/Q , ktoré vnikajú do spektroskopu kolmo na x a šírku stopy Δx zodpovedajúcu rozptylovému uhlu 2β .



Obr. A3–3

- c) V sústave elektrónového mikroskopu sú elektróny emitované z bodového zdroja rýchlosťou v . Rozptylový uhol zväzku je 2α , obr. A3–4. V tomto prípade je homogénne magnetické pole kolmé na základnú rovinu x . Elektróny prechádzajú rovinou y , ktorá sa nachádza vo vzdialenosti z od základnej roviny x . Určte minimálnu vzdialenosť z_{01} rovín x a y , pri ktorej dochádza k zaostreniu zväzku pri malých uhloch rozptylu α , a určte polomer r stopy zaostreného zväzku zodpovedajúci všeobecnému uhlu rozptylu α .



Obr. A3–4

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty:

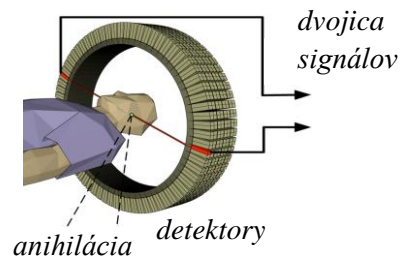
$$B = 1,0 \text{ mT}, m/Q = -5,7 \times 10^{-12} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1} \text{ (elektrón)}, v = 5,0 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

pre malé uhly rozptylu $\alpha = 1,0^\circ$, pre všeobecný prípad $\alpha = 15^\circ, \beta = 10^\circ$.

3. PET – pozitronová emisná tomografia

Jednou z moderných lekárskejších diagnostických metód je PET. Do krvného obehu sa vstrekuje rádioaktívna látka, ktorá pri svojej premene produkuje pozitrony. Postupne sa usádza v orgánoch, ktoré ju pri svojej funkcii využívajú. Najčastejšie používaná látka sa označuje FDG (*fluor-deoxy-glukóza*). Ide o molekulu glukózy, v ktorej je atóm kyslíka nahradený atómom $^{18}\text{F}_9$. Tento atóm je nestabilný a dochádza k jeho premene podľa rovnice $^{18}\text{F}_9 \rightarrow ^{18}\text{O}_8 + e^+$ na stabilný izotop kyslíka $^{18}\text{O}_8$ a pozitron e^+ .

Keďže glukóza zabezpečuje transport energie do buniek, usádza sa prednostne v miestach zvýšenej metabolickej aktivity. Pozitrony vznikajúce pri premene atómov *anihilujú* s elektrónmi v okolitom tkanive za vzniku dvojice gama fotónov. Detektory rozmiestnené okolo vyšetřovaného objektu (pozri obr. A3–5) zaznamenávajú súčasný dopad dvojice fotónov a na základe počítačového spracovania množstva zachytených fotónov sa rekonštruuje a zobrazí priestorové rozloženie miest zvýšenej aktivity v tenkej vrstve (*tomos*) okolo roviny, v ktorej sú rozmiestnené detektory. Pri posúvaní pacienta v otvore s detektormi sa postupne zobrazí séria vrstiev (*tomografia*). Z týchto zobrazení pomocou počítača sa zostaví 3D obraz (pozri obr. A3–6)



Obr. A3–5

diagnostikovaného objektu. Na základe tejto metódy sa najčastejšie vyšetřuje výskyt metastáz pri rakovine, ale používa sa taktiež pri vyšetřovaní aktivít mozgu a v rade ďalších prípadov.



Obr. A3–6

a) Pozitron vznikajúci pri premene sa pohybuje od miesta vzniku a postupne v interakcii s okolím znižuje svoju kinetickú energiu. Na krátkej dráhe (do 1 mm) *anihiluje* s elektrónom, ktorý je v pokoji (s ktorým sa náhodne pozitron stretol). Pri anihilácii páru *častica – antičastica* (elektrón – pozitron) obidve častice zaniknú a vznikne dvojica fotónov. V tomto prípade predpokladajte, že krátko pred anihiláciou je už kinetická energia E_k pozitronu veľmi malá. Vtedy obidva vznikajúce fotóny sa pohybujú navzájom v opačnom smere a majú rovnakú energiu. Vysvetlite

- prečo nemôže vzniknúť iba jeden fotón, ale vznikajú dva fotóny,
- prečo sa obidva fotóny pohybujú navzájom v opačnom smere a
- prečo majú oba fotóny rovnakú energiu.

Určte energiu E_{f0} a vlnovú dĺžku λ_{f0} každého zo vznikajúcich fotónov.

K riešeniu a) úlohy nakreslite jednoduchý ilustračný obrázok.

b) Na rozdiel od prípadu a) teraz predpokladajte, že krátko pred zrážkou má pozitron kinetickú energiu $E_k = 10 \text{ keV}$ a elektrón je v pokoji. Smery pohybu anihiláciou vzniknutých fotónov zvierajú s kolmicou na smer pohybu pozitronu rovnaký uhol δ . Určte

- rýchlosť v pohybu pozitronu pred zrážkou (použite relativistický výpočet),
- vlnovú dĺžku λ_{f1} fotónov vzniknutých pri anihilácii,
- uhol δ .

K riešeniu b) úlohy nakreslite jednoduchý ilustračný obrázok. Vyznačte v ňom smer pohybu pozitronu pred anihiláciou, smer pohybu fotónov po anihilácii a uhly δ .

c) Rádioizotop $^{18}\text{F}_9$ má polčas premeny $T = 110 \text{ min}$ a preto sa musí preparát použiť bezprostredne po jeho výrobe.

- Určte počet n_1 pozitronov, ktoré vzniknú za jednu sekundu v práve vyrobenej vzorke s obsahom $N_0 = 1,0 \times 10^{25}$ molekúl s atómom $^{18}\text{F}_9$.
- Určte počet n_2 pozitronov, ktoré vzniknú za jednu sekundu v tejto vzorke v čase $t_2 = 6,0$ hod po jej výrobe.
- Určte pomer $p = n_2/n_1$ poklesu aktivity vzorky za čas t_2 .

Rýchlosť svetla vo vákuu $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, pokojová hmotnosť elektrónu a pozitronu $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, Planckova konštanta $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

4. SONAR

Ponorky používajú na určenie hĺbky SONAR (*Sound Navigation and Ranging – Zvuková navigácia a meranie*) – ultrazvukový prístroj na meranie vzdialenosti. Zdroj z ponorky vysiela do všetkých smerov krátke impulzy ultrazvuku a následne prijíma impulzy odrazené od prekážok. Z oneskorenia odrazených impulzov sa určuje vzdialenosť prekážky.

Uvažujte nasledovné prípady:

- Ponorka sa plaví konštantnou rýchlosťou $v = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vo vodorovnom smere. Prijímaný signál odrazený od vodorovného dna je voči vysielanému oneskorený o $\tau_0 = 0,80 \text{ s}$. Vypočítajte vzdialenosť h ponorky od dna. Akej relatívnej chyby sa dopustíte, ak pri výpočte neuvažujete pohyb ponorky vo vodorovnom smere?
- Ponorka sa pohybuje vo vodorovnom smere rýchlosťou $v = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jej SONAR vysiela impulzy s periódou $T_0 = 1,0 \text{ ms}$. Perióda prijímaných impulzov odrazených od rovinného, ale šikmého dna, bola dlhšia o $\Delta T = 3,0 \mu\text{s}$, čo bolo spôsobené sklonom dna. Zvislá rovina obsahujúca trajektóriu ponorky je kolmá na rovinu dna. Určte uhol α sklonu roviny dna vzhľadom na vodorovnú rovinu. Určte, či hĺbka v smere pohybu ponorky narastala alebo klesala.
- Ponorka sa pohybuje vo vodorovnom smere rýchlosťou $v_1 = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pred ponorkou bola v rovnakej hĺbke pod hladinou zachytená druhá ponorka. SONAR vysiela vysokofrekvenčné impulzy s frekvenciou $f_0 = 100 \text{ kHz}$. Odrazené impulzy zachytené prvou ponorkou mali frekvenciu $f = f_0 + \Delta f$, kde $\Delta f = 3,5 \text{ kHz}$. Určte rýchlosť v_2 vodorovného pohybu druhej ponorky, ak predpokladáte, že obidve ponorky sa pohybujú pozdĺž ich vzájomnej spojnice.

Úlohu riešte najprv všeobecne a potom pre dané hodnoty. K riešeniam nakreslite vhodné obrázky.

Rýchlosť šírenia zvuku vo vode $c = 1,5 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník 2012/13 – Celoštátne kola kategórie A

Autori úloh: (1) Daniel Kluvanec, (2) Eubomír Mucha, (3) Ivo Čáp, (4) Eubomír Konrád – Dušan Nemeč

Recenzia: Daniel Kluvanec, Eubomír Mucha

Redakčná úprava: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013