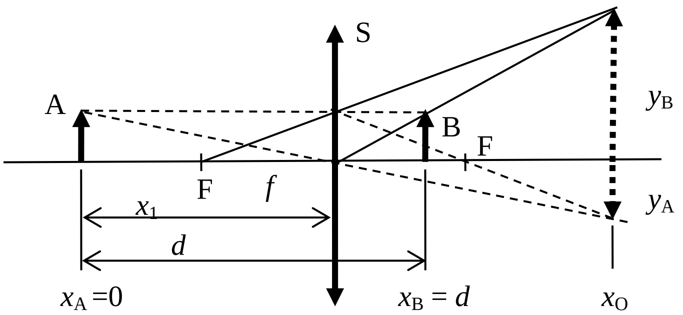
Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
krajské kolo, kategória A
riešenia úloh

1. ***Zobrazovanie šošovkou***

a) Pre predmetovú vzdialenosť $a_1 > f$ vzniká reálny obraz za šošovkou, pre $a_1 < f$ vzniká zdanlivý obraz pred šošovkou. Dva reálne obrazy tyčiniek, ktoré sa nachádzajú na rôznych miestach na osi, nemôžu mať rovnakú súradnicu, čo priamo vyplýva zo zobrazovacej rovnice. Danú situáciu možno dosiahnuť iba tak, že jeden obraz je reálny a druhý zdanlivý a šošovka S sa nachádza medzi tyčinkami. (1 bod)
Popísané zobrazenie je znázornené na obr. RA2-2



(2 body)

Obr. RA2-2

b) Pri riešení možno vychádzať zo zobrazovacích rovníc obidvoch predmetov

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_O - x_1} = \frac{1}{f} \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{d - x_1} - \frac{1}{x_O - x_1} = \frac{1}{f}.$$

Z rovníc dostaneme kvadratickú rovnicu pre x_1

$$x_1^2 - x_1\, d + \frac{f}{2}\, d = 0$$

a jej riešením

$$x_1 = \frac{d}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}\,\right].$$

Podmienka reálneho riešenia úlohy je $f < d/2$. Pri jej splnení existujú dve riešenia symetrické vzhľadom na rovinu súmernosti dvojice tyčiniek. Pre znamienko (+) $x_O > d$ (napravo od B), pre znamienko (–) $x_O < 0$ (naľavo od A).
Súradnice obrazov sú potom pre obidve riešenia

$$x_{O1} = \left(1 + \frac{f}{x_1 - f}\right) x_1 = d + \frac{f}{1 - \frac{2f}{d} + \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}}\ ,$$

$$x_{O2} = -\left(x_{O1} - d\right) = -\frac{f}{1 - \frac{2f}{d} + \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}}.$$

Pre dané hodnoty $x_1 \approx 42{,}2$ cm a $x_{O1} \approx 103{,}5$ cm,
$x_1 \approx 17{,}8$ cm a $x_{O2} \approx -43{,}5$ cm. (2 body)

c) Zväčšenia jednotlivých zobrazení sú pre $x_1 > d / 2$

$$z_A = \frac{y_A}{y_0} = -\frac{x_O - x_1}{x_1} = -\frac{f}{x_1 - f} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2f}{d}}}$$, pre dané hodnoty $z_A \approx -1{,}4$,

(1 bod)

$$z_B = \frac{y_B}{y_0} = \frac{x_O - x_1}{d - x_1} = -\frac{\frac{2f}{d}}{1 - \frac{2f}{d} - \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}}$$, pre dané hodnoty $z_B \approx 3{,}4$. (1 bod)

odkiaľ dostaneme pomer veľkostí obrazov

$$p = \left|\frac{y_A}{y_B}\right| = \left|\frac{d - x_1}{x_1}\right| = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2f}{d}}} .$$ (1 bod)

Pre dané hodnoty $p = 0{,}42$.

Pre druhú polohu šošovky $x_1 < 0$ sú výsledky rovnaké, vymenia sa iba indexy A a B:

$y_A \approx 3{,}4$ $y_B \approx 1{,}4$ $p \approx 2{,}4$. (1 bod)

d) Úloha má riešenie iba za predpokladu $f < d / 2$.

Prvý prípad nastane, ak je vzdialenosť medzi šošovkou a druhou tyčinkou $d - x_1 < f$, tzn. $x_1 > d - f > f$. Ako vidno z obrázku, je v tomto prípade obraz A′ tyčinky A reálny, prevrátený a zväčšený. Obraz B′ tyčinky B je zdanlivý, priamy a zväčšený, pričom $|y_B| > |y_A|$.

Druhý (symetrický) prípad nastane, ak je vzdialenosť medzi šošovkou a prvou tyčinkou $x_1 < f$. V tomto prípade je obraz A′ tyčinky A zdanlivý, priamy a zväčšený. Obraz B′ tyčinky B je reálny, prevrátený a zväčšený, pričom $|y_B| < |y_A|$. (1 bod)

2. Elektrónový mikroskop

a) Zmena kinetickej energie ΔE_k elektrónov je rovná práci $W = e\,U$ elektrického poľa. Ak je konečná rýchlosť elektrónov porovnateľná s rýchlosťou svetla vo vákuu, treba použiť vzťahy relativistickej mechaniky. Ak označíme m_e pokojovú hmotnosť (presne pri nulovej rýchlosti, prakticky pri rýchlosti $v << c$).
Hmotnosť elektrónu pri rýchlosti v_1

$$m_1 = \frac{m_e}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$, pre dané hodnoty $m_1 \approx 1{,}15\, m_e \approx 1{,}05\times10^{-30}$ kg. (1 bod)

Kinetická energia $E_k = m_1 c^2 - E_0$, kde $E_0 = m_e c^2$ je pokojová energia elektrónu. Energetická rovnica elektrónu má tvar

$$(m_1 - m_e)\,c^2 = e\,U_1\,.$$ (1 bod)

Potrebné napätie na urýchľovači

$$U_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{m_e c^2}{e}$$, pre dané hodnoty veličín $U_1 \approx 79{,}3$ kV. (2 body)

b) Vlnová dĺžka elektrónov je daná vzťahom $\lambda = h\,/\,p$, kde h je Planckova konštanta a p hybnosť elektrónu.

$$p = m\,v = \frac{m_e\,v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$, pričom platí $eU = (m - m_e)\,c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) m_e\,c^2$.

(2 body)

Z týchto rovníc dostaneme vzťah medzi hybnosťou a urýchľovacím napätím

$$U = \left(\sqrt{1+\left(\frac{p}{m_e\,c}\right)^2} - 1\right)\frac{m_e c^2}{e}\,.$$

Ak vyjadríme hybnosť pomocou vlnovej dĺžky, dostaneme

$$U_2 = \left(\sqrt{1+\left(\frac{h}{\lambda\, m_e\, c}\right)^2} - 1\right)\frac{m_e c^2}{e}$$, pre dané hodnoty $U_2 \approx 832$ kV. (2 body)

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_e\, c\,\lambda}{h}\right)^2}}$$, pre dané hodnoty $v_2 \approx 0{,}925\, c \approx 2{,}77\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (2 body)

3. Zmena dĺžky dňa

a) Sústava Zem – Mesiac rotuje okolo spoločného hmotného stredu, pričom polomery trajektórií telies sú

$$r_{\mathrm{Z}} = r_{\mathrm{ZM}} \frac{M_{\mathrm{M}}}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}} \quad \text{a} \quad r_{\mathrm{M}} = r_{\mathrm{ZM}} \frac{M_{\mathrm{Z}}}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}} .$$

Dynamická rovnováha je daná rovnosťou gravitačnej a zotrvačnej sily

$$G \frac{M_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{Z}}}{r_{\mathrm{ZM}}^2} = M_{\mathrm{M}}\, \omega^2 r_{\mathrm{M}} \text{, kde } \omega = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{ZM}}} .$$

Po dosadení za r_{M} dostaneme

$$r_{\mathrm{ZM}} = \sqrt[3]{G \frac{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}{\omega^2}} = \sqrt[3]{G \frac{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}{4\pi^2} T_{\mathrm{ZM}}^2} \quad , \qquad (1)$$

pre dané hodnoty $r_{\mathrm{ZM}} \approx 3{,}84 \times 10^8$ m. (2 body)

Zmenu vzájomnej vzdialenosti Zeme a Mesiaca určíme z derivácie r_{ZM}

$$\Delta r_{\mathrm{ZM}} = \frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{ZM}}}{\mathrm{d}T_{\mathrm{ZM}}} \Delta T_{\mathrm{ZM}} = \sqrt[3]{G \frac{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}}{4\pi^2}} \; \frac{2}{3} T_{\mathrm{ZM}}^{-1/3} \Delta T_{\mathrm{ZM}} = \frac{2}{3} r_{\mathrm{ZM}} \frac{\Delta T_{\mathrm{ZM}}}{T_{\mathrm{ZM}}} ,$$

pre dané hodnoty $\Delta r_{\mathrm{ZM}} \approx 37{,}0$ mm (za 1 rok). (1 bod)

b) Mechanická energia sústavy vzhľadom na hmotný stred sústavy Mesiac - Zem

$$E_{\mathrm{ZM}} = E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{transl}} + E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{rot}} + E_{\mathrm{p}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2 + M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} J_{\mathrm{Z}}\, \omega_{\mathrm{Z}}^2 + \frac{1}{2} J_{\mathrm{M}}\, \omega_{\mathrm{M}}^2 - G \frac{M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{ZM}}} ,$$

kde $J_{\mathrm{Z}} = \frac{2}{5} M_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2$ je moment zotrvačnosti Zeme vzhľadom na jej os rotácie. Doba otočenia Mesiaca $T_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{ZM}}$, tzn. $\omega = \omega_{\mathrm{M}}$, a $J_{\mathrm{M}} << M_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2$, možno kinetickú energiu vlastnej rotácie Mesiaca vo vzťahu zanedbať. Vzťah pre energiu E_{ZM} upravíme na tvar

$$E_{\mathrm{ZM}} \approx -\frac{1}{2} M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}} \left(\frac{G^2}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}} \right)^{1/3} \omega^{2/3} + \frac{1}{5} M_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2\, \omega_{\mathrm{Z}}^2 , \qquad \text{(1 bod)}$$

kde r_{ZM} sme vyjadrili pomocou (1).

Veľkosť L momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$, vzhľadom na os prechádzajúcu hmotným stredom v smere kolmom na rovinu trajektórií telies, pozostáva zo zložiek orbitálnych a zložiek zodpovedajúcich vlastnej rotácii, analogicky ako pri energii:

$$L = \left(M_{\mathrm{Z}} r_{\mathrm{Z}}^2 + M_{\mathrm{M}} r_{\mathrm{M}}^2\right)\omega + J_{\mathrm{Z}} \omega_{\mathrm{Z}} + J_{\mathrm{M}} \omega_{\mathrm{M}} .$$

Člen zodpovedajúci vlastnej rotácii Mesiaca možno zanedbať v porovnaní s ostatnými veličinami v rovnici. Pre veľkosť L momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ sústavy potom máme

$$L \approx M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}} \left(\frac{G^2}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}} \right)^{1/3} \omega^{1/3} + \frac{2}{5} M_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2\, \omega_{\mathrm{Z}} . \qquad \text{(1 bod)}$$

c) Keďže sústavu Zem – Mesiac považujeme za izolovanú, zo zákona zachovania momentu hybnosti ($\Delta \boldsymbol{L} = 0$) máme

$$\Delta L \approx M_{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{M}} \left(\frac{G^2}{M_{\mathrm{Z}} + M_{\mathrm{M}}} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{3} \omega^{-4/3} \Delta\omega \right) + \frac{2}{5} M_{\mathrm{Z}} R_{\mathrm{Z}}^2\, \Delta\omega_{\mathrm{Z}} = 0 .$$

Odtiaľ s použitím vzťahu (1) a úpravách vyjadríme zmenu dĺžky dňa na Zemi

$$\Delta T_Z \approx \frac{5M_M}{6(M_Z+M_M)}\left(\frac{r_{ZM}\,T_Z}{R_Z\,T_{ZM}}\right)^2 \Delta T_{ZM} = \frac{5}{6}\frac{G\,M_M}{R_Z^2\,r_{ZM}}\frac{T_Z^2}{4\pi^2}\,\Delta T_{ZM}\,,$$

pre dané hodnoty $\Delta T_Z \approx 1{,}67\times 10^{-5}$ s za rok. (2 body)

Za 4,5 mld rokov to predstavuje $\Delta T \approx 20{,}9$ h. V čase po tesne po vzniku Mesiaca bola dĺžka dňa na Zemi približne $T_{Z0} \approx 3{,}1$ hodiny. (1 bod)

Pozn.: Tento odhad je iba veľmi približný a nesleduje nerovnomernosť vývoja sústavy Zem – Mesiac. Presnejšie odhady uvádzajú okolo 5 hodín.

d) Ak sa zmenia uhlové rýchlosti ω a ω_Z, zmení sa mechanická energia o $\Delta E_{ZM} < 0$. Táto zmena zodpovedá teplu uvoľnenému v telese Zeme (v Mesiaci sa slapové sily neuplatnia, lebo sa vzhľadom na Zem neotáča)

$$\Delta E_{ZM} = -\frac{1}{2}M_Z M_M\left(\frac{G^2}{M_Z+M_M}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3}\omega^{-1/3}\Delta\omega\right) + \frac{1}{5}M_Z R_Z^2\left(2\omega_Z\,\Delta\omega_Z\right) = -Q$$

Po úprave dostaneme vzťah pre uvoľnené teplo napr. v tvare

$$Q = \frac{8\pi^2}{5}\frac{M_Z R_Z^2}{T_Z^3}\,\Delta T_Z - \frac{1}{3}M_Z M_M\left(\frac{G^2}{M_Z+M_M}\right)^{1/3}\frac{2}{3}\left(\frac{T_{ZM}}{2\pi}\right)^{1/3}\frac{2\pi}{T_{ZM}^2}\,\Delta T_{ZM}\,,$$

ďalšou úpravou druhého člena v tomto výraze, ak použijeme výraz (1), dostaneme zjednodušený výraz

$$Q = \frac{8\pi^2}{5}\frac{M_Z R_Z^2}{T_Z^3}\,\Delta T_Z - \frac{1}{3}G\frac{M_Z M_M}{r_{ZM}}\frac{\Delta T_{ZM}}{T_{ZM}}\,.$$

Dosadením daných a vypočítaných veličín máme

$Q \approx (10{,}02 - 0{,}37)\times 10^{19}$ J = $9{,}65\times 10^{19}$ J.

Zodpovedajúci výkon $P = Q$ / rok ≈ 3,07 TW,

na jedného obyvateľa Zeme pripadá priemerná časť výkonu $P_1 \approx 438$ W. (2 body)

4. ***Vysokofrekvenčné vlastnosti kondenzátora***

a) Impedancia

$$\mathbf{Z} = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{G + j\omega C} = R + \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + \mathrm{j}\omega\left(L - \frac{C}{G^2 + (\omega C)^2}\right), \qquad \text{(2 body)}$$

kde j je komplexná jednotka, j $=\sqrt{-1}$.

b) Ak fázový rozdiel $\varphi = 0$, imaginárna zložka impedancie je nulová

$$L - \frac{C}{G^2 + (\omega_0 C)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{C^2}}\ .$$

Pre dané hodnoty veličín $\omega_0 \approx 22{,}3 \times 10^6$ rad·s^{-1}. (1 bod)

Pri uhlovej frekvencii ω_0 hodnota impedancie je

$$\mathbf{Z}_0 = R + \frac{G}{G^2 + (\omega_0 C)^2} = R + \frac{L}{C}G\ .$$

Pre dané hodnoty veličín Zo ≈ R = 0,010 Ω. (1 bod)

c) Fázový rozdiel φ určíme zo vzťahu $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}\{\mathbf{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\mathbf{Z}\}}$. Po dosadení a úprave môžeme dostať napr. tvar

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left[-\frac{\omega C}{G}\,\frac{1 - \frac{L}{C}\left(G^2 + (\omega C)^2\right)}{1 + \frac{R}{G}\left(G^2 + (\omega C)^2\right)}\right].$$

Výraz upravíme na závislosť od premennej x, napr.

$$\varphi = -\mathrm{arctg}\left[\frac{\omega_0^3\, LC^2\left(1 - x^2\right)x}{G\,(1 + RG) + \omega_0^2\, RC^2\, x^2}\right].$$

Pre dané hodnoty $\varphi_1 \approx$ -1,55 rad ≈ - 89,1 °, $\varphi_2 \approx$ 1,55 rad ≈ 89,1°. (2 body)

d) Pre jednoduchý paralelný C_pG_p dvojpól je impedancia

$$\mathbf{Z}_\mathrm{p} = \frac{1}{\mathbf{Y}_\mathrm{p}} = \frac{1}{G_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega C_\mathrm{p}} = \frac{G_\mathrm{p}}{G_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} - \mathrm{j}\omega\frac{C_\mathrm{p}}{G_\mathrm{p}^2 + (\omega C_\mathrm{p})^2} \qquad (1)$$

Impedanciu z časti a) možno upraviť na tvar (1), ak použijeme nerovnosti zo zadania a predpoklad nízkych frekvencií, $\omega << G/C$,

$$\mathbf{Z} = \frac{R\left[G^2 + (\omega C)^2\right] + G}{G^2 + (\omega C)^2} + \mathrm{j}\omega\,\frac{L\left(G^2 + (\omega C)^2\right) - C}{G^2 + (\omega C)^2} \approx$$

$$\approx \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2}(1 + RG) - \mathrm{j}\omega\,\frac{C}{G^2 + (\omega C)^2}\left(1 - \frac{L}{C}\,G^2\right) \approx$$

$$\approx \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} - \mathrm{j}\omega\,\frac{C}{G^2 + (\omega C)^2}.$$

Za predpokladu $\omega << G/C$ možno kondenzátor považovať za paralelnú kombináciu kapacitora s kapacitou $C_\mathrm{p} = C$ a rezistora s vodivosťou $G_\mathrm{p} = G$.

$C = C_\mathrm{p}$ a $G_\mathrm{p} = G$ s podmienkou. (2 body)

Pre jednoduchý sériový R_sL_s dvojpól má vzťah pre impedanciu tvar

$$\boldsymbol{Z}_s = R_s + j\omega L_s \,. \tag{2}$$

Vzťah pre impedanciu podľa časti a)

$$\boldsymbol{Z} = R + \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + j\omega\left(L - \frac{C}{G^2 + (\omega C)^2}\right)$$

možno upraviť (2), ak sú splnené podmienky

$$R >> \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2}\text{, tzn. } \omega >> \frac{1}{C}\sqrt{\frac{G}{R}}\sqrt{1 - RG} \approx \frac{1}{C}\sqrt{\frac{G}{R}}$$

$$L >> \frac{C}{G^2 + (\omega C)^2}\text{, tzn. } \omega >> \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{G^2}{C^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

Pri vysokých frekvenciách, keď sú splnené tieto podmienky, sa kondenzátor správa ako sériová kombinácie induktora s indukčnosťou $L_s = L$ a rezistora s odporom $R_s = R$ (indukčná cievka). (2 body)

Pozn. k hodnotenie úloh: Všeobecné výsledky sa môžu líšiť od inštruktážneho postupu. V prípade správnych výsledkov bodovanie a) 2 body; b) časť 2 body; c) časť 2 body; d) časť 4 body.

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník– Úlohy krajského kola kategórie A

Autori úloh: (1) Arpád Kecskés – Ivo Čáp, (2 a 4) Ivo Čáp, (3) Ivo Čáp – Aba Teleki

Recenzia: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakčná úprava: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013