Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
krajské kolo
kategória B
riešenie úloh

1. Šikmý vrh

Riešenie:

a) $x = v_0 t\cos\alpha$ (1), $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$ (2),

$v_x = v_0 \cos\alpha$ (3), $v_y = v_0 \sin\alpha - g t$ (4). ***1 bod***

Zo vzťahov (1) a (2) dostaneme po vylúčení času funkciu trajektórie

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 = x \tan\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \qquad (5)$$ ***1 bod***

b) Pre uhol β platí vzťah

$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - g t}{v_0 \cos\alpha} .$$

Ak vyjadríme čas zo vzťahu (1), dosadením do vzťahu pre $\tan\beta$ dostaneme

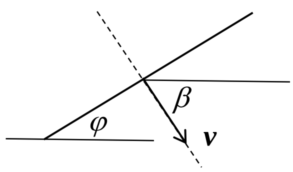
$$\tan\beta = \tan\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x \text{, resp. } \beta = \arctan\left(\tan\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x \right).$$ ***1 bod***

Pre $\beta = 0$ dostaneme – platí pre bod C, ktorý je najvyšším bodom trajektórie,

$$x_1 = \frac{v_0^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha . \qquad (6)$$ ***1 bod***

c) Keďže lopta pri kolmom dopade na strechu v zostupnej časti trajektórie, je $\tan\beta < 0$. Pre uhly platí vzťah $\varphi + |\beta| = 90°$, obr. RB–1, a teda

$$\tan\varphi = -\frac{1}{\tan\beta} .$$



Obr. RB–1

Pre bod dopadu ($x = d$) platí

$$\tan\varphi = -\frac{1}{\tan\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} d} \text{, resp. } \frac{g d}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{1}{\tan\varphi} + \tan\alpha \qquad (7)$$

$$h = d \tan\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} d^2 = \frac{1}{2} d \left(\tan\alpha - \frac{1}{\tan\varphi} \right),$$

odkiaľ dostaneme

$$\tan\alpha = \frac{2h}{d} + \frac{1}{\tan\varphi} . \qquad (8)$$

Pre dané hodnoty: $\alpha \approx 68°$. ***2 body***

Vzťah (7) upravíme s použitím pomôcky

$$\frac{g d}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \frac{g d}{v_0^2} \left(1 + \tan^2\alpha \right) = \frac{1}{\tan\varphi} + \tan\alpha$$

a po dosadení výsledku (7) dostaneme

$$v_0 = \sqrt{g\,d\,\frac{1+\tan^2\alpha}{\frac{1}{\tan\varphi}+\tan\alpha}} = \sqrt{\frac{g\,d}{2}}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2h}{d}+\frac{1}{\tan\varphi}\right)^2}{\frac{1}{\tan\varphi}+\frac{h}{d}}}\,.$$

Pre dané hodnoty: $v_0 \approx 9{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. ***2 body***

Výšku vrcholu trajektórie možno určiť zo vzťahov (2) a (4) pre podmienku $v_y = 0$ alebo zo vzťahov (5) a (6)

$$y_\mathrm{m} = \frac{v_0^2\,\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{d}{4}\,\frac{\tan^2\alpha}{\frac{1}{\tan\varphi}+\tan\alpha} = \frac{d}{4}\,\frac{\left(\frac{2h}{d}+\frac{1}{\tan\varphi}\right)^2}{\frac{1}{\tan\varphi}+\frac{h}{d}}\,.$$

Pre dané hodnoty: $y_\mathrm{m} \approx 3{,}8$ m. ***2 body***

2. Obvod s kondenzátormi

Riešenie:

a) Keďže v okamihu zapnutia spínača sú napätia na kondenzátoroch nulové: $U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = 0$, kondenzátory možno pre tento okamih nahradiť skratom. Rezistory sú tak priamo pripojené paralelne ku zdroju, $U_{R1} = U_{R2} = U_{R3} = U$. Celkový prúd zdroja v okamihu zapnutia spínača

$I_0 = \dfrac{U}{R} = U\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)$, pre dané hodnoty $I_0 = 1{,}7$ mA. ***2 body***

b) Po ustálení je prúd prechádzajúci kondenzátormi nulový. Ako vidno zo schémy obvodu, je nulový prúd zdroja $I_\infty = 0$ a nulové sú i prúdy rezistorov, tzn. napätia $U_{R1} = U_{R2} = U_{R3} = 0$. Keďže je napätie na rezistoroch nulové, možno rezistory v ustálenom stave nahradiť skratom. Kondenzátory sú tak priamo pripojené na zdroj a pre jednotlivé napätia platí $U_{C1} = U$, $U_{C2} = U$, $U_{C3} = -U$. ***2 body***

c) Všetky kondenzátory sa nabijú na napätie U, tzn. celkový náboj

$Q = C\,U = (C_1 + C_2 + C_3)U$, pre dané hodnoty $Q = 2{,}3\ \mu$C. ***1 bod***

Ak uvážime nabíjací prúd rádovo $I \approx 1$ mA (pozri výsledok I_0), je potrebný čas rádovo

$\tau \approx Q/I = (2\ \mu\mathrm{C})/(1\ \mathrm{mA}) = 2$ ms. Čas prechodného deja je rádovo 10^{-3} s. ***1 bod***

d) Práca vykonaná zdrojom

$W = Q\,U$, pre dané hodnoty $W = 23\ \mu$J. ***1 bod***

Táto práca je rovná súčtu energie E_C akumulovanej v elektrickom poli kapacitorov a tepla Q_t uvoľneného v rezistoroch počas prechodného deja.

Akumulovaná energia $\quad E_\mathrm{C} = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)\,U^2$.

Uvoľnené teplo $\;Q_\mathrm{t} = W - E_\mathrm{C} = QU - \dfrac{1}{2}QU = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)\,U^2$,

Pre dané hodnoty $Q_t = 11{,}5\ \mu$J. ***2 body***

e) Účinnosť nabíjania kapacitorov $\eta = \dfrac{E_\mathrm{C}}{W} = 50\,\%$. ***1 bod***

3. Čeljabinský meteorit

Riešenie:

a) Z rovnosti gravitačnej (dostredivej) a odstredivej (zotrvačnej) sily dostaneme

$$G\frac{M_S m}{r_A^2} = m\frac{v_0^2}{r_A}\text{, odkiaľ } v_0 = \sqrt{\frac{G M_S}{r_A}}\text{, pre dané hodnoty } v_0 = 19{,}3\ \text{km·s}^{-1}.$$ ***2 body***

b) Pre pohyb po elipse platí pre extrémne body trajektórie (ZZME a ZZMH)

$$\frac{1}{2}m v_1^2 - G\frac{M_S m}{r_A} = \frac{1}{2}m v_2^2 - G\frac{M_S m}{r_V},$$

$$m v_1 r_A = m v_2 r_V,$$

odkiaľ

$$v_1 = \sqrt{2G M_S \frac{r_V}{r_A\left(r_V + r_A\right)}}\text{, pre dané hodnoty } v_1 = 13{,}1\ \text{km·s}^{-1}.$$ ***3 body***

c) Pre najvzdialenejší bod trajektórie a bod na úrovni trajektórie Zeme platí

$$\frac{1}{2}m v_1^2 - G\frac{M_S m}{r_A} = \frac{1}{2}m v_Z^2 - G\frac{M_S m}{r_Z}\text{, odkiaľ}$$

$$v_Z = \sqrt{2G M_S\left[\frac{1}{r_Z} - \frac{1}{r_V + r_A}\right]}\text{, pre dané hodnoty 35 km·s}^{-1}.$$ ***2 body***

d) Prírastok vnútornej energie a tým aj energia uvoľnená pri explózii

$$E_{ex} = \eta\left(\frac{1}{2}m v_Z^2 - \frac{1}{2}m v_3^2\right) = \eta\, m\left[G M_S\left(\frac{1}{r_Z} - \frac{1}{r_V + r_A}\right) - \frac{1}{2}v_3^2\right],$$

pre dané hodnoty $E_{ex} = 1{,}8\times10^{15}$ J = $4{,}28\times10^{8}$ kg TNT ≈ 430 kt TNT. ***3 body***

4. Žiarovka

Riešenie:

a) Príkon žiarovky pri prevádzkových podmienkach

$$P = U\,I = \frac{U^2}{R}\text{, odkiaľ vyjadríme odpor } R = \frac{U^2}{P} = \rho_{\mathrm{R}}\,\frac{l}{S} = \rho_{\mathrm{R0}}\left[1+\alpha_{\mathrm{R}}\left(t_{\mathrm{p}}-t_0\right)\right]\frac{4l}{\pi d^2}.$$

Dĺžka vlákna je potom

$$l = \frac{U^2}{P}\,\frac{\pi d^2}{4\,\rho_{\mathrm{R0}}\left[1+\alpha_{\mathrm{R}}\left(t_{\mathrm{p}}-t_0\right)\right]}\text{, pre dané hodnoty } l \approx 58\text{ cm.}$$ **2 body**

b) Za tohto predpokladu v stave rovnováhy je žiarivý výkon rovný príkonu žiarovky

$$P = \sigma\,(T_{\mathrm{p}}^4 - T_0^4)\,\pi D\,L\text{, pričom } T_{\mathrm{p}}^4 >> T_0^4, \qquad (1)$$

odkiaľ $L \approx \dfrac{P}{\sigma\,T_p^4\,\pi D}$, pre dané hodnoty $L \approx 19$ mm **2 body**

Počet závitov skrutkovice pri veľmi malom stúpaní $N \approx \dfrac{l}{\pi\left(D-d\right)}$, pre dané hodnoty $N \approx 390$.

Stúpanie skrutkovice $s = \dfrac{L}{N}$, pre dané hodnoty $s \approx 48$ μm.

Z výsledku vidno, že skrutkovica je veľmi hustá
a vytvára takmer súvislú valcovú plochu. **1 bod**

c) Z podmienky výkonovej rovnováhy (1) dostaneme hodnotu napätia

$$U_{\mathrm{t}} = \sqrt{\sigma\,T_{\mathrm{t}}^4\,\pi D\,L\,\rho_{\mathrm{R0}}\left[1+\alpha_{\mathrm{R}}\left(t_{\mathrm{t}}-t_0\right)\right]\frac{4\,l}{\pi d^2}}\text{, pre dané hodnoty } U_{\mathrm{t}} \approx 473\text{ V, čo predstavuje}$$

približne dvojnásobok nominálnej prevádzkovej hodnoty. **2 body**

d) Pri napätí U_{m} platí podmienka výkonovej rovnováhy

$$\sigma T_{\mathrm{m}}^4 \pi D\,L = \frac{U_{\mathrm{m}}^2}{\rho_{\mathrm{R0}}\left[1+\alpha_{\mathrm{R}}\left(T_{\mathrm{m}}-T_0\right)\right]\dfrac{4\,l}{\pi d^2}} \approx \frac{\pi d^2 U_{\mathrm{m}}^2}{4\,l\,\rho_{\mathrm{R0}}\,\alpha_{\mathrm{R}}T_{\mathrm{m}}}\text{, odkiaľ}$$

$$T_{\mathrm{m}} \approx \sqrt[5]{\frac{U_{\mathrm{m}}^2\,d^2}{4\sigma\,\rho_{\mathrm{R0}}\,\alpha_{\mathrm{R}}\,l\,D\,L}}\text{, pre dané hodnoty } T_{\mathrm{m}} \approx 3\,440\text{ K, resp. } t_{\mathrm{m}} \approx 3\,170\text{ °C.}$$

Z tabuľky vidno, že tlak nasýtenej pary pri tejto teplote $p_{\mathrm{n}} \approx 1$ Pa je približne 1 000 × väčší ako pri teplote 2 500 °C. V tomto pomere sa skráti životnosť žiarovky, tzn. pri napätí 400 V by žiarovka svietila približne 1 hodinu. **3 body**

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník – Úlohy krajského kola kategórie B

Autori úloh:	(1, 2, 4) – Ivo Čáp, (3) – Ľubomír Mucha, Ivo Čáp
Recenzia:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakčná úprava:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013