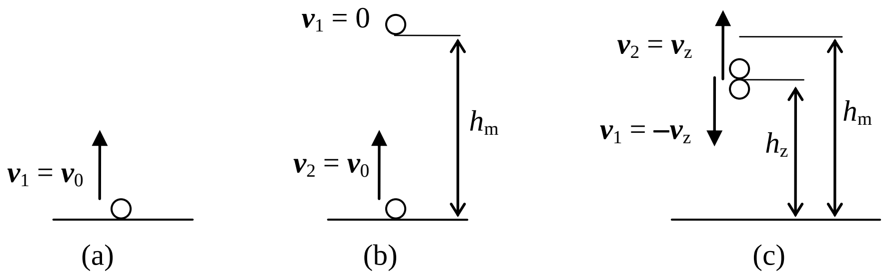
Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
krajské kolo
kategória D
riešenie úloh

1. *Tenisové loptičky*

Riešenie:

a) Prvá loptička po výstrele z automatu, obr. RC−1 (a) vystúpi zvislo nahor do výšky h_m. V tomto okamihu je vystrelená druhá loptička zvislo nahor a súčasne prvá loptička padá z výšky h_m po tej istej trajektórii, obr. RC−1 (b). Vo výške h_z nad rovinou výstrelu sa zrazia, obr. RC−1 (c).



Obr. RD−1

1 bod

b) Maximálnu výšku prvej loptičky určíme napr. zo zákona zachovania energie loptičky v tiažovom poli Zeme

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g h_m ,$$

odkiaľ dostaneme

$$h_m = \frac{v_0^2}{2g} .$$ Pre dané hodnoty veličín $h_m \approx 20{,}4$ m. ***2 body***

Pozn.: K rovnakému výsledku možno dospieť aj zo vzťahov pre časovú závislosť výšky a rýchlosti loptičky.

c) Čas t_m výstupu prvej loptičky do najvyššieho bodu trajektórie dostaneme z podmienky pre nulovú rýchlosť $v_1 = v_0 - g\, t_m = 0$

$$t_m = \frac{v_0}{g} .$$

V okamihu zrážky, vo výške h_z nad rovinou výstrelu, pre prvú loptičku platí

$$h_z = h_m - \frac{1}{2} g \left(t_z - t_m\right)^2 \qquad (1)$$

a pre druhú loptičku

$$h_z = v_0 \left(t_z - t_m\right) - \frac{1}{2} g \left(t_z - t_m\right)^2 , \qquad (2)$$

kde čas t_z je čas, ktorý uplynul od okamihu výstrelu prvej loptičky po zrážku loptičiek.

Z (1) a (2) máme

$t_z = \frac{h_m}{v_0} + t_m = \frac{3}{2}\frac{v_0}{g}$. Pre dané hodnoty veličín t_z = 3,06 s. ***3 body***

d) Po dosadení t_z napr. do (1) dostaneme

$h_z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{8}\frac{v_0^2}{g} = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3}{4}h_m$. Pre dané hodnoty veličín h_z = 15,3 m. ***2 body***

e) Pri pohybe loptičiek v tiažovom poli s rovnakou začiatočnou rýchlosťou musí byť v rovnakej výške loptičiek rovnaká kinetická energia a tým aj veľkosť rýchlosti

$$v_{1z} = v_{2z} = \sqrt{2g\left(h_m - h_z\right)} = \sqrt{2g\left(h_m - \frac{3}{4}h_m\right)} = \frac{v_0}{2}.$$

Pre danú hodnotu $v_{z1} = v_{z2}$ = 10,0 m·s^{-1}.

Pre vektory rýchlosti platí $\boldsymbol{v}_{1z} = -\boldsymbol{v}_{z2}$. ***2 body***

2. *Curling*

Riešenie:

a) Za t_0 = 4 s rovnomerne spomalil kameň z rýchlosti v_0 na rýchlosť $v_0/2$. Zrýchlenie kameňa je teda záporné a pre jeho veľkosť platí

$a = \frac{|\Delta v|}{t_0} = \frac{\left|\frac{v_0}{2} - v_0\right|}{t_0} = \frac{v_0}{2t_0}$. Pre dané hodnoty veličín a = 1,25 m.s^{-2}. ***1 bod***

Pre treciu silu platí $F_t = f\,F_N = f\,F_G = f\,mg$, kde $\boldsymbol{F}_N$ je tlaková sila kameňa kolmá na ľad. Trecia sila spôsobuje spomalenie a, teda platí

$m\,a = f\,m\,g$, odkiaľ $f = \frac{v_0}{2g\,t_0}$. Pre dané hodnoty veličín $f \approx 0{,}13$. ***1 bod***

b) Zmena kinetickej energie prvého kameňa je rovná práci sily trenia

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f\,mg\,s_0.$$

Odtiaľ rýchlosť prvého kameňa tesne pred zrážkou

$v_{10} = \sqrt{v_0^2 - 2f\,g\,s_0} = \sqrt{v_0^2 - \frac{v_0}{t_0}s_0}$. Pre dané hodnoty veličín $v_{10} \approx 8{,}7$ m.s^{-1}.

Druhý kameň sa pred zrážkou nepohyboval, teda jeho rýchlosť pred zrážkou bola nulová v_{20} = 0 m·s^{-1}. ***3 body***

c) Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy a pri dokonale pružnej zrážke aj mechanická energia sústavy.

Celková hybnosť sústavy tesne pred zrážkou a po nej bola $p = mv_{10}$.

Celková mechanická energia sústavy tesne pred zrážkou a tesne po zrážke bola rovná kinetickej energii $E_k = \frac{1}{2}m\,v_{10}^2$.

Zo zákona zachovania mechanickej energie a hybnosti

$$\frac{1}{2}mv_{10}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad (1)$$

$$mv_{10} = mv_1 + mv_2 . \qquad (2)$$

Rovnice (1) a (2) upravíme na tvar

$v_{10}^2 - v_1^2 = (v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = v_2^2$ (3)

$v_{10} - v_1 = v_2$. (4)

Po delení rovnice (3) rovnicou (4) za predpokladu $v_{10} - v_1 \neq 0$ máme

$v_{10} + v_1 = v_2$. (5)

Z rovníc (4) a (5) vyplýva

$v_1 = 0$ a $v_2 = v_{10}$.

Prvý kameň sa pri zrážke zastaví a druhý kameň získa rýchlosť, ktorú mal prvý kameň pred zrážkou. ***3 body***

d) Prvý kameň zostane stáť v mieste zrážky, a preto $d_1 = 0$ m.

Druhý kameň prejde od miesta zrážky pri začiatočnej rýchlosti v_2 a spomalení a dráhu s_2, ktorá sa rovná hľadanej vzdialenosti

$d_2 = s_2 = \dfrac{v_{02}^2}{2a} = v_0 t - s_0$. Pre dané hodnoty veličín $d_2 = 30$ m. ***2 body***

3. *Valec vo vode*

Riešenie:

a) Hmotnosť valca určíme ako súčin jeho objemu V a hustoty ρ_1

$m = V \rho_1 = \pi R^2 h \rho_1$. Pre dané hodnoty veličín $m \approx 905$ g. ***2 body***

b) Na čiastočne ponorený valec vo vode pôsobia dve sily: tiažová sila $F_G = m g$ a vztlaková sila $F_{vz} = (1/2)V\rho_0 g$. Sila F, ktorou valec tlačí na dno nádoby, je daná rozdielom týchto síl, t.j.

$$F = F_G - F_{vz} = mg - \frac{V\rho_0 g}{2} = Vg\left(\rho_1 - \frac{\rho_0}{2}\right) = \pi R^2 h g\left(\rho_1 - \frac{\rho_0}{2}\right).$$

Pre dané hodnoty veličín $F \approx 3{,}33$ N. ***4 body***

c) Voda na začiatku bola vo výške $h/2$. Ak stúpne hladina vody o Δx, ponorený objem valca bude

$$V_p = \pi R^2\left(\frac{h}{2} + \Delta x\right).$$

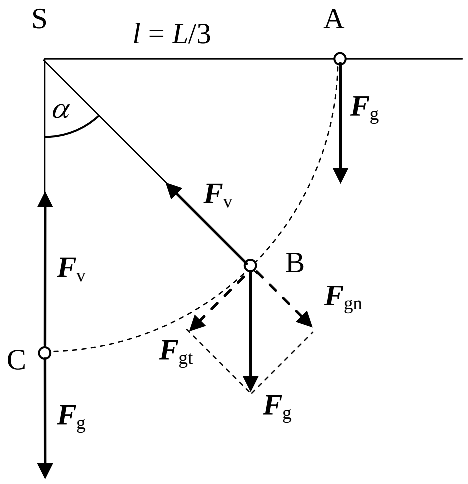
Na to, aby sa valec vznášal, sa musí vztlaková sila vyrovnať tiažovej, t.j.

$$\pi R^2 h \rho_1 g = \pi R^2\left(\frac{h}{2} + \Delta x\right)\rho_0 g .$$

Odtiaľ zmena výšky $\Delta x = h\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_0} - \dfrac{1}{2}\right)$. Pre dané hodnoty veličín $\Delta x = 3$ cm. ***4 body***

4. *Guľôčka na lanku*

Riešenie:



Obr. RD–2

a) V inerciálnej sústave spojenej so stolom pôsobia na guľôčku iba dve sily:

$\boldsymbol{F}_g$ – tiažová sila, ktorá má vo všetkých polohách rovnakú veľkosť a pôsobí vždy smerom nadol**,**

$\boldsymbol{F}_v$ – sila ťahu lanka, ktorá pôsobí smerom k stredu kružnicovej trajektórie a narastá z nulovej hodnoty v hornej polohe až k maximálnej hodnote v dolnej polohe.

obrázok 2 body, vysvetlenie 1 bod

Pozn.: Zakreslenie odstredivej sily je nesprávne – v inerciálnej sústave nepôsobí.

b) Ťahová sila $\boldsymbol{F}_v$ je vždy kolmá na smer pohybu a spolu s normálovou zložkou tiažovej sily $\boldsymbol{F}_{gn}$ vyvoláva dostredivé zrýchlenie $a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{1}{m}\left(F_v - F_{gn}\right)$.

Ťahová sila je $F_v = \frac{mv^2}{l} + F_{gn}$.

Rýchlosť určíme pomocou zákona zachovania mechanickej energie. Ak položíme nulovú hodnotu mechanickej energie v polohe A, platí pre všeobecnú polohu

$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$, odkiaľ $v = \sqrt{2gh}$, kde h je hĺbka pod úrovňou bodu A.

Ťahová sila je potom $F_v = \frac{2mgh}{l} + F_{gn}$

Pre polohu A: $v_A = 0$, $F_g = mg$, $F_{vA} = 0$.

Pre polohu B ($h = l/\sqrt{2}$, $F_{gn} = mg/\sqrt{2}$):

$v_B = \sqrt{\sqrt{2}gl}$, $F_g = mg$, $F_{vB} = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$.

Pre polohu C ($h = l$, $F_{gn} = F_g = mg$):

$v_C = \sqrt{2gl}$, $F_g = mg$, $F_{vC} = 3mg$. ***4 body***

c) Moment sily M_2 ťahu vlákna vzhľadom na hranu stola H nadobúda počas pohybu guľôčky maximálnu hodnotu v bode C (najväčšia hodnota sily F_v a najväčšia hodnota ramena sily) $M_{2m} = F_{vC}\, l = 3mgl$. Moment tiažovej sily dosky vzhľadom na hranu stola $M_1 = m_0\, g\, (L/6)$. Z rovnosti $M_1 = M_{2m}$ dostaneme

$m_m = m_0 \frac{L}{18l} = \frac{m_0}{6}$, pre danú hodnotu veličiny m_m = 200 g. ***3 body***

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník– Úlohy krajského kola kategórie D
Autori úloh: (1, 3, 4) Ľubomír Konrád, (2) Ľubomír Konrád – Dušan Nemec
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp
Redakčná úprava: Ivo Čáp
Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013