

Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
-kolské kolo
kategória A úlohy

1. Raketa

- a) Pri reaktívnom pohybe sa mení hmotnosť telesa. Hybnosť rakety v čase t je $p(t) = M(t)v(t)$ a v okamihu $t + dt$, keď sa časť paliva s hmotnosťou $dm = -dM$ oddelí od rakety relatívnou rýchlosťou v_r hybnosť sústavy je

$$p(t + dt) = (v - v_r)(-dM) + (M + dM)(v + dv),$$

kde $dM < 0$ je zmena hmotnosti rakety a $dv > 0$ zmena jej rýchlosti.

V tiaľovom poli je zmena hybnosti sústavy $p(t + dt) - p(t) = -Mg dt$ rovná impulzu tiaľovej sily.

$$(v - v_r)(-dM) + (M + dM)(v + dv) - Mv = -Mg dt.$$

Ak zanedbáme veľmi malý člen $dM dv$, upravíme rovnicu na tvar

$$M dv = -v_r dM - Mg dt, \text{ resp. } dv = -v_r \frac{dM}{M} - g dt$$

Integráciou rovnice medzi začiatným stavom a určitým okamihom stavu po reaktívnom pohone dostaneme

$$\int_0^v dv = -v_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} - g \int_0^t dt, \text{ resp. } v = -v_r \ln \frac{M}{M_0} - g t.$$

Po dosadení za hmotnosť v v čase t dostaneme výsledok

$$v = -v_r \ln(1 - kt) - g t. \quad \text{3 body}$$

- b) Palivo vyhorí za dobu

$$t_1 = \alpha / k, \text{ pre dané hodnoty veličín } t_1 \approx 25 \text{ s}$$

a dosiahnutá rýchlosť v tomto okamihu bude

$$v_1 = -v_r \ln(1 - \alpha) - g \alpha / k, \text{ pre dané hodnoty veličín } v_1 \approx 85 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Výška rakety h_1 je

$$h_1 = \int_0^{t_1} v dt = -v_r \int_0^{t_1} \ln(1 - kt) dt - \int_0^{t_1} g t dt,$$

teda

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{v_r}{k} [(1 - kt_1) \ln(1 - kt_1) + kt_1] - \frac{1}{2} g t_1^2 = \\ &= \frac{v_r}{k} [(1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + \alpha] - \frac{1}{2} g \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

Pre dané hodnoty veličín $h_1 \approx 440 \text{ m}$ 2 body

- c) Po vyhorení paliva pokračuje pohyb rakety zvislo nahor z výšky h_1 so začiatnou rýchlosťou v_1 . Ak neuvážime odpor vzduchu, platí

$$v = v_1 - g(t - t_1).$$

V najvyššom bode $v = v_2 = 0$, čomu zodpovedá čas t_2 , pre ktorý máme

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1}{g}.$$

Maximálna výška, ktorú raketa dosiahne

$$h_2 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}, \text{ pre dané hodnoty veličín } h_2 \approx 807 \text{ m.}$$

Pre voľný pád rakety z výšky h_2 na zem platí máme

$$t_3 - t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \text{ pre dané hodnoty veličín } t_3 \approx 13 \text{ s.}$$

Celkový čas letu od štartu až po dopad na Zem

$$t_3 = \frac{\alpha}{k} + \frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}}, \text{ pre dané hodnoty veličín } t_3 \approx 47 \text{ s.}$$

Rýchlosť dopadu

$$v_3 = \sqrt{2gh_2}, \text{ pre dané hodnoty veličín } v_3 \approx 126 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

3 body

d) Odporová sila je

$$F_o = \frac{1}{2} \rho v^2 c_x S_x.$$

V okamihu pred dopadom je $F_o \approx 2,1 \text{ N}$ a $F_g \approx 39 \text{ N}$. Pomer $F_o/F_g \approx 5,3 \%$.

Zanedbanie odporu vzduchu zásadne neovplyvní výsledky výpočtov, ak sa uspokojíme s presnosťou výsledkov do 5 %.

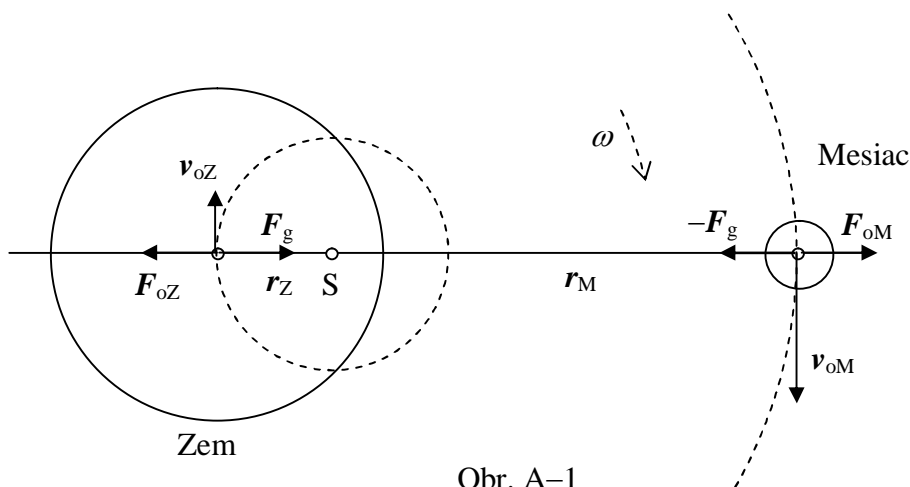
2 body

2. Sústava Zem–Mesiac

a) Príčinou zväčšovania vzájomnej vzdialenosti Zeme a Mesiaca je pôsobenie slapových síl, ktoré súvisia s relatívnou vlastnou rotáciou telies vzhľadom na rotáciu sústavy ako celku. Práca slapových síl je na úkor energie uvedených rotačných pohybov, tzn. brzdí sa orbitálny pohyb i vlastná rotácia telies.

2 body

b)



Obr. A-1

Stredy Zeme a Mesiaca a hmotný stred sústavy ležia na jednej priamke. Celá sústava sa otá a okolo hmotného streda S uhlovou rýchlosťou ω iarkovane sú vyznačené kruhnicové trajektórie (sústredné kružnice so stredom S). Pre každé z telies sú v rovnováhe sily odstredivá a gravitačná.

2 body

- c) Sústava Zem–Mesiak rotuje okolo jej hmotného streda, obr. RA–1. Polomery kruhnicových trajektórií Zeme a Mesiaca sú

$$r_Z = r_{ZM} \frac{M_M}{M_Z + M_M} \approx 4,67 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad r_M = r_{ZM} \frac{M_Z}{M_Z + M_M} \approx 3,79 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Rovnováha sústavy vychádza z rovnosti gravitačnej príťažlivosti a odstredivej sily. Napríklad pre Mesiak platí

$$G \frac{M_M M_Z}{r_{ZM}^2} = M_M \omega^2 r_M, \text{ kde } \omega = \sqrt{G \frac{M_Z + M_M}{r_{ZM}^3}} = \frac{2\pi}{T_S}.$$

Periódou pohybu Mesiaca okolo Zeme vzhľadom na inerciálnu sústavu spojenú s hmotným stredom, je

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{r_{ZM}^3}{G(M_Z + M_M)}} \approx 2,355 \cdot 10^6 \text{ s} = 27 \text{ d } 6 \text{ h } 8 \text{ m}.$$

Súvis zmeny vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom a periódou rotácie sústavy okolo spoločného hmotného streda vyjadríme vzťahom

$$T_S = \frac{dT_S}{dr_{ZM}} r_{ZM} = 3 \sqrt{\frac{1}{G} \frac{r_{ZM}}{M_Z + M_M}} r_{ZM} \approx 0,34 \text{ ms/rok}.$$

O tento čas sa predtým doba obehu Mesiaca okolo Zeme za jeden rok.

Pri rovnomernom zväčšovaní vzájomnej vzdialenosti Zeme a Mesiaca by bola vzdialenosť pri vzniku sústavy Zem–Mesiak $r_{MZ0} \approx 2,18 \cdot 10^8 \text{ m}$. Tomu zodpovedá periódou orbitálneho pohybu

$$T_{S0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{MZ0}^3}{G(M_Z + M_M)}} \approx 1,01 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 11 \text{ d } 15 \text{ h } 48 \text{ m}$$

2 body

- d) Mechanická energia orbitálneho pohybu sústavy Zem–Mesiak je

$$E_{\text{orb}} = \frac{1}{2} M_Z \omega^2 r_Z^2 + \frac{1}{2} M_M \omega^2 r_M^2 - G \frac{M_Z M_M}{r_{ZM}}.$$

Po dosadení (použijeme výsledky b) časti úlohy) a úprave

$$E_{\text{orb}} = -G \frac{M_Z M_M}{2r_{ZM}}.$$

So zväčšovaním vzdialenosti sa mechanická energia orbitálneho pohybu zväčšuje.

Orbitálny moment hybnosti je

$$L_{\text{orb}} = M_M r_M^2 \omega + M_Z r_Z^2 \omega = M_M M_Z \sqrt{\frac{G}{M_Z + M_M}} \sqrt{r_{ZM}}.$$

2 body

- e) Relatívna zmena energie orbitálneho pohybu

$$\frac{E_{\text{orb}}}{E_{\text{orb}}} = \frac{r_{MZ}}{r_{ZM}}, \text{ pre dané hodnoty } \frac{E_{\text{orb}}}{E_{\text{orb}}} \approx 9,6 \cdot 10^{-11} \text{ za rok}.$$

$$\frac{L_{\text{orb}}}{L_{\text{orb}}} = \frac{r_{MZ}}{2r_{ZM}}, \text{ pre dané hodnoty } \frac{L_{\text{orb}}}{L_{\text{orb}}} \approx 4,8 \cdot 10^{-11} \text{ za rok}.$$

Za čas od vzniku sústavy Zem–Mesiac nastala relatívna zmena veľičín

$$\frac{E_{\text{orb}} - E_{\text{orb}0}}{|E_{\text{orb}0}|} = \frac{-\frac{1}{r_{\text{MZ}}} + \frac{1}{r_{\text{MZ}0}}}{\frac{1}{r_{\text{MZ}0}}} = \frac{r_{\text{MZ}} - r_{\text{MZ}0}}{r_{\text{MZ}}} = \frac{r_{\text{MZ}} t_{\text{MZ}}}{r_{\text{MZ}}},$$

pre dané hodnoty

$$\frac{E_{\text{orb}} - E_{\text{orb}0}}{|E_{\text{orb}0}|} \approx 0,43.$$

V dôsledku pôsobenia *slapových síl* dochádza k poklesu uhlovej rýchlosti vlastnej rotácie Zeme a Mesiaca. Rotácia Mesiaca vzhľadom na Zem sa v dôsledku toho zastavila a rotácia Zeme značne sa brzdila. Súčasne sa brzdí aj uhlová rýchlosť orbitálneho pohybu, čo sa prejavuje zväčšením vzájomnej vzdialenosti a tým aj mechanickej energie a momentu hybnosti orbitálneho pohybu. Keďže je sústava izolovaná, je moment hybnosti sústavy konštantný, tzn. nárast orbitálneho momentu hybnosti je rovný poklesu momentu hybnosti vlastnej rotácie Zeme a Mesiaca. Celková mechanická energia sústavy klesá a tento pokles je rovný práci slapových síl.

2 body

3. Vysokofrekvenčné vlastnosti cievky

Ivo Áp

a) Admitancia $Y = G + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$

$$Y = G + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega \left[C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] \quad 1 \text{ bod}$$

b) Ak sa cievka správa ako rezistor, musí byť imaginárna časť admitancie nulová (tento stav sa nazýva paralelná rezonancia)

$$C - \frac{L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0, \text{ resp. } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

$$Z_0 = |Y_0|^{-1} = \frac{L}{RC + GL}.$$

číslenne $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $Z_0 = 12,5 \text{ k}\Omega$.

1 bod

c) Impedanciu vyjadríme ako prevrátenú hodnotu admitancie

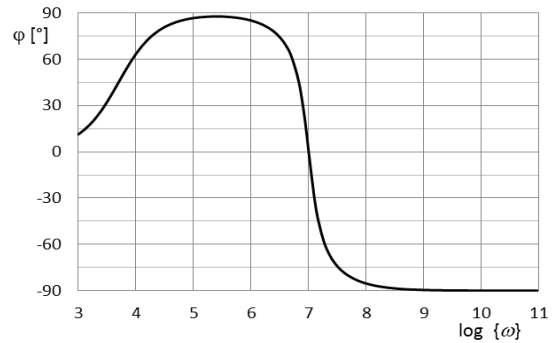
$$\frac{|Z|}{Z_0} = \left[\frac{|Y|}{Y_0} \right]^{-1} = \left\{ \frac{L}{GL + RC} \sqrt{\left[G + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega L \frac{C}{L} - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2} \right\}^{-1}$$

Argument impedancie je záporný argument admitancie, ktorý určíme ako arkustangens pomeru imaginárnej a reálnej časti komplexnej admitancie

$$\varphi = -\arctan \frac{\text{Im}\{Y\}}{\text{Re}\{Y\}} = \arctan \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}{G + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \arctan \left(\frac{\omega C}{G} \frac{R^2 - \frac{L}{C} + (\omega L)^2}{R^2 + \frac{R}{G} + (\omega L)^2} \right).$$

2 body

Grafy frekvenčných charakteristík sú na nasledujúcich obrázkoch (MS EXCEL).



2 body

- d) Medzné frekvencie, ktoré zodpovedajú $Q = \tan 45^\circ$, sú $\omega_1 \approx 5,0 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ a $\omega_2 \approx 6,8 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$. Najväčšia hodnota faktoru kvality $Q_{\max} \approx 25$ zodpovedá uhlovej frekvencii $\omega_{\max} \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$. V intervale (ω_1, ω_2) prevláda indukčný charakter cievky (lineárne rastúca a s impedančnou charakteristikou).

2 body

- e) Pre $\omega \ll \omega_1$ má cievka indukčný charakter, ale prevláda jej rezistívny charakter. Pri veľmi nízkych frekvenciách sa cievka správa ako rezistor s odporom $R_L = \frac{R}{1 + RG}$.

V okolí uhlovej frekvencie ω_0 sa prejavuje rezonančný charakter cievky, z indukčného prejavu sa mení na kapacitný.

Pre $\omega \gg \omega_0$ sa cievka správa ako kvalitný kapacitor s kapacitou C s faktorom kvality $Q > 10^4$ na okraji zobrazeného pásma uhlovej frekvencie (lineárne klesajúca a s impedančnou charakteristikou).

2 body

4. Optická sústava

- a) Rovinné zrkadlo vytvára primárny obraz symetrický vzhľadom na rovinu zrkadla, tzn. vo vzdialenosti $l_1 = 2x$ od predmetu P.

Ak je predmet vo vzdialenosti $a_1 = d - x$ od hlavnej roviny zakriveného zrkadla, vytvorí sa obraz vo vzdialenosti a_2 , ktorá zodpovedá zobrazovacej rovnici

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}, \text{ tzn. } a_2 = \frac{f a_1}{a_1 - f},$$

kde ohnisková vzdialenosť $f = R/2$. Pre $a_1 < f$ je $a_2 < 0$ a obraz sa vytvorí za zrkadlom (zdanlivý a priamy). Pre $a_1 > f$ je $a_2 > 0$ a obraz sa vytvorí pred zrkadlom (skutočný a prevrátený).

Vzdialenosť obrazu od predmetu je

$$l_2 = \left| \frac{f a_1}{a_1 - f} - (d - x) \right|.$$

Rovnica $l_1 = l_2$ má niekoľko riešení. S ohľadom na riešenie úlohy môžeme nastaviť tri prípady. Obraz vytvorený dutým zrkadlom môže byť reálny alebo zdanlivý. Reálny obraz vzniká pred zrkadlom a môžeme nastaviť dva prípady, ak obraz je ďalej od zrkadla ako predmet, $a_1 < a_2$, alebo je bližšie ako predmet $a_1 > a_2$. Hranicu oboch prípadov predstavuje rovnosť $a_1 = a_2 = 2f = R$. Zdanlivý obraz vznikne, ak $a_1 < f$.

1. Pre $f < a_1 < 2f$ vzniká reálny obraz, pri om $a_2 > a_1$, ktorý musí byť za rovinným zrkadlom. Podmienku $l_1 = l_2$ možno splniť iba ak sú obidva obrazy v rovnakom mieste, tzn. $a_2 = a_1 + 2x$, obrázok (a),

$$a_2 = \frac{f a_1}{a_1 - f} = \frac{f(d-x)}{d-x-f} = d+x$$

$$x = \sqrt{d(d-2f)} \quad \text{pre } d > R, \quad (\text{A})$$

2. Pri $a_1 > 2f$ vzniká reálny obraz medzi S a F, pri om $a_1 > a_2$, tzn. obraz je pred rovinným zrkadlom. Z podmienky $l_1 = l_2$ dostaneme tvar $a_1 - a_2 = 2x$. Aby bolo možné podmienku splniť, musí pri $a_1 > 2f$ platiť $d > 2f = R$, pozri obr. (b).

$$a_2 = \frac{f a_1}{a_1 - f} = \frac{f(d-x)}{d-x-f} = a_1 - 2x = d - 3x,$$

$$x^2 - 2\frac{2}{3}(d-f)x + \frac{d}{3}(d-2f) = 0.$$

Riešením kvadratickej rovnice dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{2}{3}(d-f) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3d(d-2f)}{4(d-f)^2}} \right].$$

Podmienka riešenia

$$4(d-f)^2 - 3d(d-2f) > 0 \text{ a po úprave}$$

$$d^2 - 2df + 4f^2 = (d-f)^2 + 3f^2 > 0 \text{ je splnená pre ubovo né } d.$$

Keďže je obraz medzi bodmi S a F a jeho vzdialenosť od rovinného zrkadla je $3x$, musí platiť $x < 1/3(d-f)$, tzn. výsledok (+) nevyhovuje,

$$x = \frac{2}{3}(d-f) \left[1 - \sqrt{1 + \frac{3d(2f-d)}{4(d-f)^2}} \right] \text{ pre } d > R. \quad (\text{B})$$

3. Pre $a_1 < f$ je obraz neskutočný a $a_2 < 0$, pozri obr. (c). Z toho vyplýva podmienka $x > d-f$ a teda $d < f+x$

Pre $l_1 = l_2$ dostaneme $2x = d - x - a_2$

$$2x = d - x - \frac{f a_1}{a_1 - f},$$

$$x^2 + 2\frac{2}{3}x(f-d) - \frac{1}{3}(2f-d)d = 0.$$

Riešením kvadratickej rovnice dostaneme

$$x = \frac{2}{3}(d-f) \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{3(2f-d)d}{4(d-f)^2}} \right].$$

Podmienka riešiteľnosti

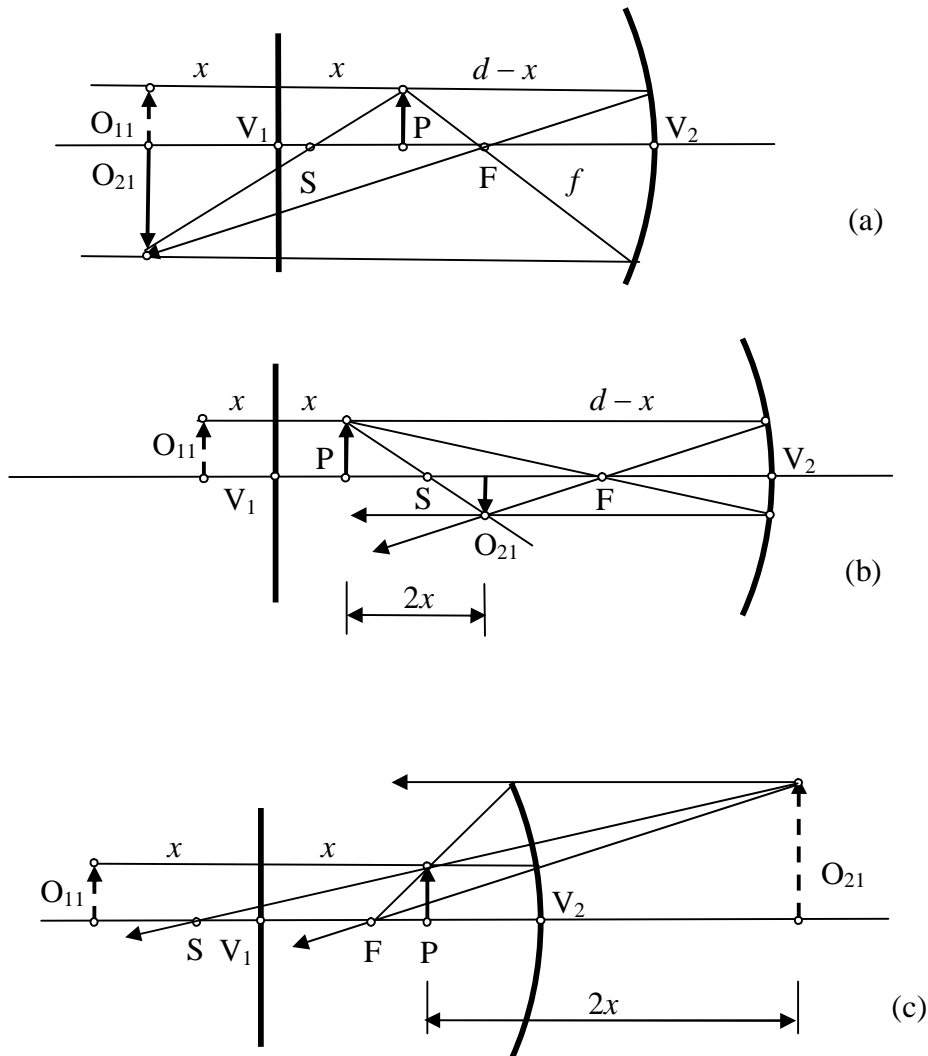
$$1 + \frac{3(2f-d)d}{4(d-f)^2} > 0, \text{ resp. } d^2 - 2fd + 4f^2 = 3f^2 + (d-f)^2 > 0$$

je vždy splnená.

Pre splnenie úvodnej podmienky nevyhovuje výsledok so znamienkom (-)

$$x = \frac{2}{3}(d-f) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3(2f-d)d}{4(d-f)^2}} \right] \text{ pre ubovo né } d. \quad (\text{C})$$

- b) Jednotlivé prípady sú schematicky znázornené v nasledujúcich obrázkoch. Z obrázkov a z odvodenia vyplýva, že primárny obraz vytvorený rovinným zrkadlom je vždy zdanlivý a priamy. Primárny obraz vytvorený dutým zrkadlom je v prvom prípade skutočný a priamy, v druhom skutočný a prevrátený a v treťom zdanlivý a priamy.



3 body

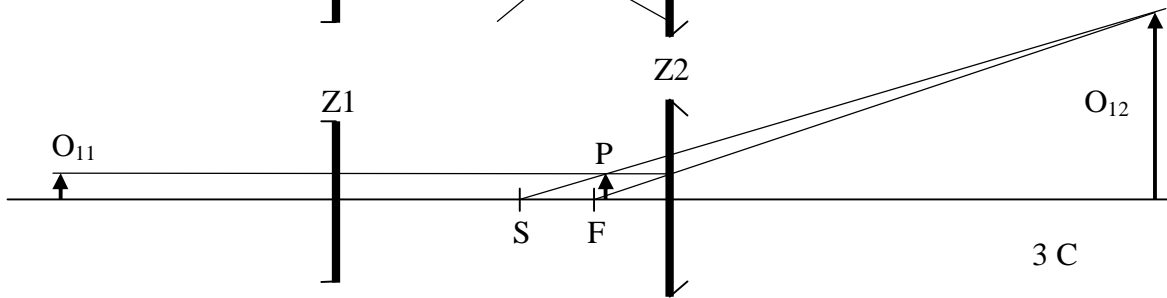
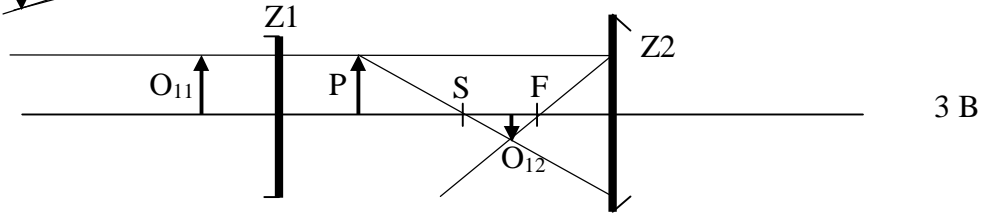
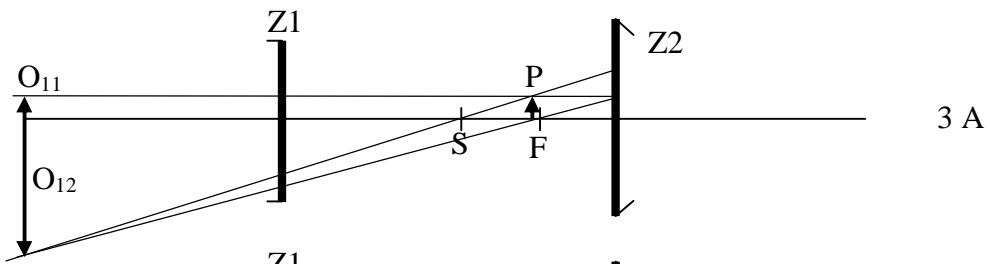
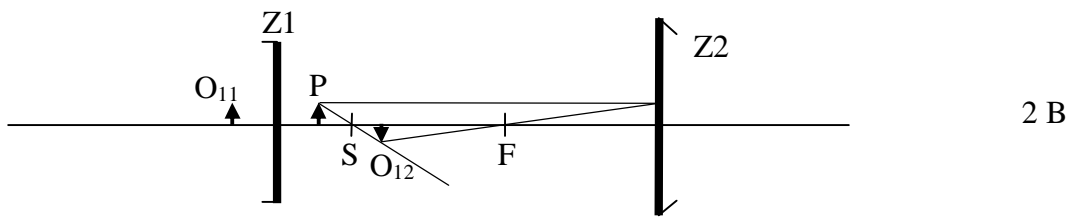
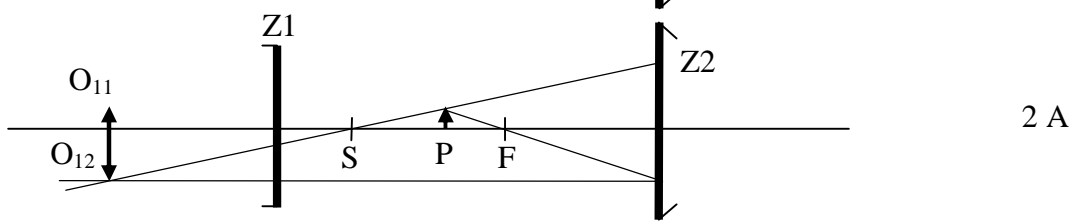
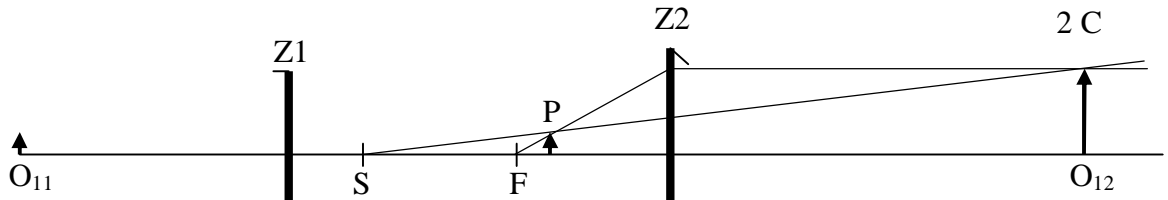
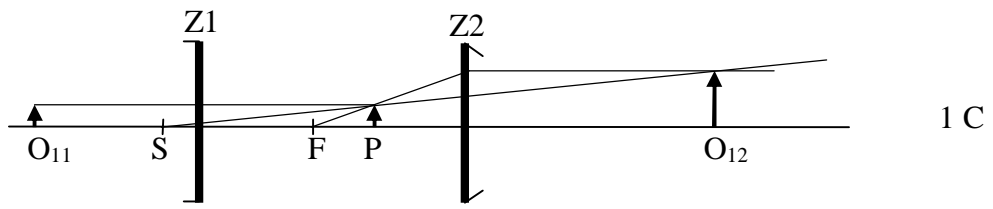
- c) Pre prvý prípad $R = 40$ cm a $d_1 = 35$ cm platí $d_1 < R$, tzn. môže nastať iba tretí prípad, vzťah (C). Po dosadení dostaneme $x_{1C} \approx 22,6$ cm.

Pre druhý prípad $R = 40$ cm a $d_2 = 50$ cm platí $d_2 > R$, tzn. predmet možno postaviť do dvoch pozícií, prvá zodpovedá tretiemu prípadu (C) $x_{2C} \approx 35,3$ cm, druhá prvému prípadu (A) $x_{2A} \approx 22,4$ cm a tretia podľa (B) $x_{2B} \approx 4,7$ cm.

Pre tretí prípad $R = 40$ cm a $d_3 = 90$ cm platí $d_3 > R$, tzn. sú splnené podmienky pre všetky tri prípady. Pre prvý prípad (A) $x_{3A} \approx 67,1$ cm, pre druhý prípad (B) $x_{3B} \approx 20,6$ cm, pre tretí prípad (C) $x_{3C} \approx 72,7$ cm.

Všetky prípady sú graficky znázornené v nasledujúcich schémach.

3 body



5. Thomsonov model atómu vodíka

a) S použitím Gaussovej vety

$$E = \frac{k e}{R^3} r \quad \text{pre } r \leq R \quad \text{a} \quad E = \frac{k e}{r^2} \quad \text{pre } r \geq R,$$

kde $k = 9,0 \times 10^9 \text{ V}^{-1} \cdot \text{m}$ je konštanta v Coulombovom zákone.

3 body

b) Uvažujeme pohyb elektrónu vo vnútri nabitej gule.

$$\frac{k e^2}{R^3} r = \frac{m v^2}{r}, \quad m v r = n \hbar,$$

$$r_n^4 = \frac{R^3 \hbar^2}{k e^2 m} n^2 = n^2 r_1^4.$$

Pre $r_2 = R$ platí

$$R = \frac{4 \hbar^2}{k e^2 m}, \quad \text{pre hodnoty velí } r_2 = R \approx 2,12 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

$$r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \frac{\hbar^2}{k e^2 m}, \quad \text{pre hodnoty velí } r_1 \approx 1,50 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

Pre $n = 3$ platí $r_3 > R$

$$\frac{k e^2}{r^2} = \frac{m v^2}{r}, \quad m v r = n \hbar,$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{k e^2 m} n^2$$

$$r_3 = \frac{9 \hbar^2}{k e^2 m}, \quad \text{pre hodnoty velí } r_3 \approx 4,76 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

3 body

c) Mechanická energia $E = E_k + E_p$.

Pre $r > R$

$$E_p = -\frac{k e^2}{r},$$

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{k e^2}{r_n} = -\frac{k e^2}{2 r_n}, \quad \text{pre } n \geq 2$$

$$E_n = -\frac{k^2 e^4 m}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}.$$

Pre hodnoty velí $E_2 \approx -5,46 \times 10^{-19} \text{ J} \approx -3,41 \text{ eV}$, $E_3 \approx -2,43 \times 10^{-19} \text{ J} \approx -1,51 \text{ eV}$.

Pre $r < R$

$$E_p = -\frac{k e^2}{R} - \frac{k e^2}{2 R^3} (R^2 - r^2),$$

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{k e^2}{R} - \frac{k e^2}{2 R^3} (R^2 - r_n^2) = -\frac{3 k e^2}{2 R} + \frac{k e^2}{R^3} r_n^2,$$

$$E_n = -\frac{3 k e^2}{2 r_2} + \frac{k e^2}{2 r_2} n = \frac{k e^2}{2 r_2} (-3 + n) = \frac{k^2 e^4 m}{8 \hbar^2} (-3 + n).$$

Pre hodnoty velí $E_1 \approx -10,91 \times 10^{-19} \text{ J} \approx -6,81 \text{ eV}$.

Vlnové dĺžky

$$\lambda_{12} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{2h^3c}{2k^2e^4m},$$

pre dané hodnoty velí íñ $\lambda_{12} \approx 3,7 \cdot 10^{-7}$ m,

$$\lambda_{23} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{18h^3c}{5^2k^2e^4m} = \frac{9}{5} \frac{2h^3c}{2k^2e^4m},$$

pre dané hodnoty velí íñ $\lambda_{23} \approx 6,7 \cdot 10^{-7}$ m

3 body

- d) Nie je to možné, lebo vlnky hladiny sú na vonkajšej strane kladnej gule bez ohľadu na jej polomer.

1 bod

6. Vlhkosť vzduchu

- a) Ak dochádza k zrážaniu vody zo vzduchu, znamená to, že relatívna vlhkosť dosiahla hodnotu $\eta_1 = 100\%$.

Z tabuľky tlaku nasýtenej pary pri teplote $t_1 = -10^\circ\text{C}$ je jej tlak $p_{n1} = 2,86$ hPa. Zo stavovej rovnice ideálneho plynu dostaneme pre tento parciálny tlak vodnej pary hmotnosť vody

$$m_1 = M_m \frac{p_{n1} V_1}{RT_1}.$$

Pre dané hodnoty velí íñ $m_1 = (18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}) \frac{(2,86 \times 10^2 \text{ Pa})(1,0 \text{ m}^3)}{(8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})(263 \text{ K})} \approx 2,36 \text{ g}$.

Táto hodnota zároveň predstavuje hustotu pary $\rho_{n1} = 2,36 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$.

1 bod

- b) Pri teplote $t_2 = 20^\circ\text{C}$ je tlak nasýtenej pary $p_{n2} = 23,4$ hPa. Tomu zodpovedá hustota pary

$$\rho_{n2} = M_m \frac{p_{n2}}{RT_2},$$

pre dané hodnoty velí íñ

$$\rho_{n2} = (18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}) \frac{(23,4 \times 10^2 \text{ Pa})}{(8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})(293 \text{ K})} \approx 17,3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Pri zohriatí vzduchu dôjde k zmene hustoty pri konštantnom tlaku

$$\rho_2 = \rho_{n1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{V_1} \frac{T_1}{T_2}, \text{ pre dané hodnoty velí íñ } \rho_2 \approx 2,12 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Relatívna vlhkosť je potom

$$\eta_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{n2}}, \eta_2 \approx 12,3\%.$$

Hmotnosť vody, ktorá sa nachádza v miestnosti je

$$m_2 = \rho_2 V_2, \text{ pre dané hodnoty velí íñ } m_2 \approx 111 \text{ g}.$$

Pri teplote $t_3 = 30^\circ\text{C}$ je tlak nasýtenej pary $p_{n3} = 42,4$ hPa. Tomu zodpovedá hodnota hustoty nasýtenej pary, hustota pary v miestnosti, relatívnej vlhkosti a hmotnosti vody

$$\rho_{n3} \approx 30,3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}, \rho_3 \approx 2,05 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}, \eta_3 \approx 6,8\% \text{ a } m_3 \approx 108 \text{ g}.$$

2 body

- c) Pri teplote t_2 a relatívnej vlhkosti η_4 je hmotnosť vodnej pary v miestnosti

$$m_4 = \rho_4 V_2 = \eta_4 \rho_{n2} V_2 \approx 409 \text{ g}.$$

Na dosiahnutie tejto vlhkosti treba v miestnosti dodatočne odpariť vodu s hmotnosťou

$$m_0 = m_4 - m_2 \approx 298 \text{ g, tzn. takmer } 1/3 \text{ litra.}$$

2 body

d) Tepelná kapacita ideálneho plynu pri konstantnom objeme je

$$C_V = \frac{s}{2} n R = \frac{s}{2} \frac{pV}{T}, \text{ kde } s \text{ je počet stupňov voľnosti molekuly (pre vodu } s_1 = 6, \text{ pre vzduch } s_2 = 5).$$

Celkový tlak vzduchu pozostáva z parciálneho tlaku pary p_p a parciálneho tlaku suchej zložky (kyslík a dusík) $p_{vz} = p_a - p_p$. Jednotlivé zložky tepelnej kapacity sú

$$C_{Vp} = \frac{s_1}{2} \frac{p_4 V}{T_2} = \frac{s_1}{2} \frac{\eta_4 p_{n2} V}{T_2} \quad \text{a} \quad C_{Vs} = \frac{s_2}{2} \frac{(p_a - p_4) V}{T_2} = \frac{s_2}{2} \frac{(p_a - \eta_4 p_{n2}) V}{T_2}.$$

Pomer tepelných kapacít

$$k = \frac{C_{Vp}}{C_{Vp} + C_{Vs}} = \frac{1}{1 + \frac{s_2}{s_1} \left(\frac{p_a}{\eta_4 p_{n2}} - 1 \right)} \approx 1,3 \text{ \%}.$$

2 body

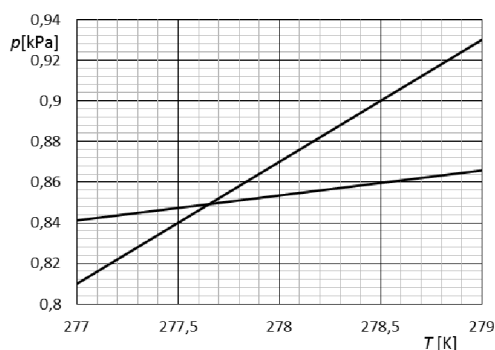
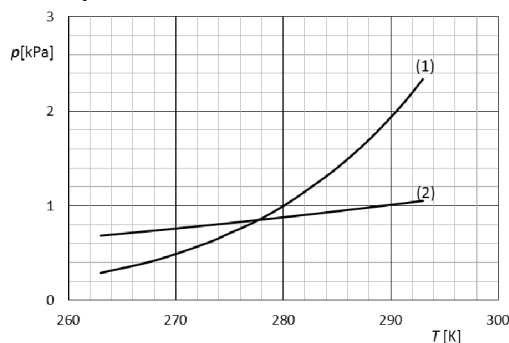
e) Pri adiabatickej expanzii sa uplatní Poissonova konštanta $\kappa = C_p / C_V = (s + 2) / s$. Dej je síce adiabatický, ale plyny vo valci navzájom interagujú a dochádza medzi nimi k výmene tepla. Preto nemôžeme riešiť separátne expanziu suchej zložky a vodnej pary. Vzhľadom na malý podiel pary v celkovej tepelnej kapacite môžeme vlhký vzduch považovať za ideálny plyn s Poissonovou konštantou $\kappa = 1,4$ suchého vzduchu. Pri adiabatickej expanzii klesá teplota i tlak plynu vo valci

$$pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa, \text{ tzn. } V = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\kappa} V_0, \text{ resp. } V = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\kappa-1)} V_0 \text{ alebo } p = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Para vo valci je v termodynamickej rovnováhe so suchou zložkou a má teda jej teplotu. Tlak pary vo valci je potom pri zadaní jej hodnoty tlaku p_2 a teploty T_2

$$p_p = p_2 \frac{T}{T_2} \frac{V_0}{V} = p_2 \left(\frac{T}{T_2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (\text{A}).$$

Ku kondenzácii to ne dochádza, keď tlak pary dosiahne tlak nasýtenej pary pri danej teplote. S uvážením predchádzajúceho vzťahu a závislosti $p_n = f(T)$ pre nasýtenú paru riešime sústavu dvoch rovníc, z ktorých jedna je zadaná v tabuľkovej alebo grafickej forme. Taká sústava sa zvyčajne rieši graficky (riešenie je priesečník grafov oboch funkcií) alebo pri požiadavke väčšej presnosti niektorou numerickou metódou. Pre náš prípad môžeme obidva postupy skombinovať. Ak znázorníme graficky závislosť $p_n = f(T)$ s použitím hodnôt z tabuľky (napr. v zadaní uvedený odkaz), dostaneme krivku (1). Vynesením závislosti (A) dostaneme krivku (2).



Z grafu vidno, že priese ník sa nachádza v bode s teplotou medzi 277 K a 278 K. Graf prekreslíme pre užší interval teploty, čím získame presnejšiu lokalizáciu priese níka. Teplota $T_4 \approx 277,65$ K. Tejto teplote zodpovedá objem

$$V = \left(\frac{T_2}{T_4} \right)^{1/(\kappa-1)} V_0 \approx 5,72 \text{ dm}^3.$$

3 body

7. *Meranie relatívnej elektrickej konštanty (relatívnej permitivity) dielektrika – experimentálna úloha* 10 bodov

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník Úlohy –kolského kola kategórie A

Autori úloh: Dušan Nemeč (1), Ivo Štápl (2–7), Aba Teleki (2), Arpád Kecskés (4)

Recenzia: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha, Mária Kládiová

Redakčná úprava: Ivo Štápl

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA a Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012