Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
školské kolo
kategória A
zadanie úloh

1. Raketa

Raketa s celkovou začiatočnou hmotnosťou M_0 = 10 kg je vypustená zvislo nahor z povrchu Zeme s nulovou začiatočnou rýchlosťou. Začiatočná hmotnosť paliva v rakete je αM_0, kde α = 0,60. V čase t po štarte má raketa hmotnosť $M_0\,(1 - k\,t)$, kde konštanta $k = 0{,}024\ \mathrm{s^{-1}}$. Rýchlosť plynov unikajúcich z dýzy rakety má vzhľadom na raketu konštantnú veľkosť $v_r = 360\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Napíšte pohybovú rovnicu rakety. Ukážte, že rýchlosť v rakety, ako funkcia času, počas horenia paliva je daná výrazom $v = -\,v_r \ln(1 - k\,t) - g\,t$.

b) Určte veľkosť v_1 rýchlosti rakety a jej výšku h_1 v okamihu, v ktorom raketa práve spotrebovala posledné palivo.

c) Určte maximálnu výšku h_2, ktorú raketa dosiahne, čas t_3 od štartu, za ktorý sa raketa vráti na zem, a rýchlosť v_3 dopadu rakety na zem.

d) V skutočnosti sa prejavuje pri pohybe i odpor vzduchu. Porovnajte tiažovú silu rakety pred dopadom na zem so silou odporu vzduchu, ak je obsah jej kolmého priemetu $S_x = 100\ \mathrm{cm^2}$, koeficient aerodynamického odporu c_x = 0,020 a hustota vzduchu $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Posúďte, či má zanedbanie odporu vzduchu podstatný vplyv na výsledky predchádzajúcich výpočtov.

Pozn. V riešení úlohy uvažujte tiažové zrýchlenie $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, odpor vzduchu zanedbajte.

Pomôcky:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\,x+b} = \frac{1}{a}\ln(a\,x+b)+C;\quad \int[\ln(a\,x+b)]\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[(a\,x+b)\ln(a\,x+b)-(a\,x+b)\right]+C;$$

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad \text{pre} \quad n \neq -1$$

2. Sústava Zem–Mesiac

Meraním vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom pomocou odrazu laserového lúča od zrkadla inštalovaného na Mesiaci sa zistilo, že vzdialenosť r_{ZM} medzi Zemou a Mesiacom sa zväčšuje o Δr_{ZM} = 37 mm za rok.

a) Vysvetlite, čo je hlavnou príčinou postupného zväčšovania vzájomnej vzdialenosti medzi Mesiacom od Zemou.

Uvažujme zjednodušený model sústavy Zem – Mesiac. Zem považujme za homogénnu guľu s hmotnosťou $M_Z = 5{,}97\cdot10^{24}$ kg a polomerom $R_Z = 6{,}38\cdot10^{6}$ m, Mesiac za homogénnu guľu s hmotnosťou $M_M = 7{,}35\cdot10^{22}$ kg a polomerom $R_M = 1{,}74\cdot10^{6}$ m. Súčasnú vzájomnú vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca $r_{ZM} = 3{,}84\cdot10^{8}$ m považujte počas periódy orbitálneho pohybu telies za konštantnú. Osi rotácie obidvoch telies sú rovnobežné a kolmé na rovinu orbitálneho pohybu Mesiaca okolo Zeme. Sústavu Zem – Mesiac považujte za izolovanú sústavu dvoch telies. Perióda T_S sústavy je rovnaká ako perióda T_M rotácie Mesiaca okolo vlastnej osi.

b) Nakreslite obrázok sústavy Zem–Mesiac, nakreslite v ňom vzájomnú polohu a trajektórie obidvoch telies a vyznačte v ňom potrebné veličiny.

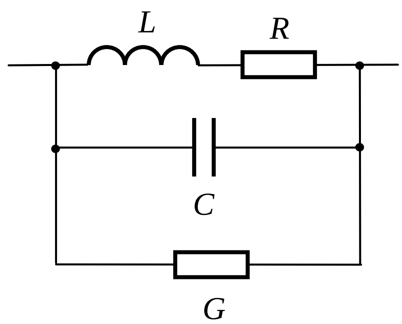
c) Určte polomery r_Z a r_M kružníc, po ktorých sa pohybujú stredy Zeme a Mesiaca, a periódu T_S rotácie sústavy (dobu obehu Mesiaca okolo Zeme). Určte hodnotu zmeny ΔT_S doby obehu Mesiaca okolo Zeme za jeden rok, ak považujete uvedenú zmenu vzájomnej vzdialenosti Δr_{MZ}. Aká by bola doba T_{S0} obehu Mesiaca okolo Zeme v čase vzniku sústavy Zem–Mesiac pred t_{ZM} = 4,5 mld. rokov, ak by bola ročná zmena vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom Δr_{ZM} po celú dobu existencie sústavy konštantná?

d) Odvoďte vzťah pre mechanickú energiu E_{orb} a celkový moment hybnosti L_{orb} orbitálneho pohybu sústavy Zem – Mesiac vzhľadom na vzťažnú sústavu spojenú s jej hmotným stredom. Pri vyšetrovaní orbitálneho pohybu považujte Zem a Mesiac za hmotné body, ktoré sa nachádzajú v ich stredoch.

e) Určte hodnotu relatívnej zmeny veličín E_{orb} a L_{orb} za jeden rok, ak dochádza k uvedenej zmene vzájomnej vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom. Určte hodnotu relatívnej zmeny veličiny E_{orb} za dobu t_{ZM}, ak predpokladáte rovnomernú zmenu vzájomnej vzdialenosti medzi Zemou a Mesiacom a vysvetlite podstatu týchto zmien.

3. Vysokofrekvenčné vlastnosti cievky

Základná vlastnosť cievky je spojená s energiou magnetického poľa cievky, ktoré vzniká pri prechode elektrického prúdu vinutím cievky. Ideálna cievka (induktor) je bezstratová súčiastka elektrického obvodu, ktorej magnetická charakteristika je indukčnosť *L*. Reálna cievka má však nenulový odpor *R* vinutia. Po pripojení cievky na zdroj elektrického napätia vzniká medzi závitmi cievky elektrické pole, takže cievka sa javí aj ako kondenzátor s kapacitou *C*. Prostredie, v ktorom sa cievka nachádza, nie je dokonale nevodivé, čo sa prejavuje zvodovým prúdom medzi závitmi. Tento jav opisuje paralelný rezistor s vodivosťou *G*. Náhradná schéma cievky, ktorá má uvedené vlastnosti, je znázornená na obr. A–1.



Obr. A–1

Uvažujme cievku pripojenú na zdroj harmonického striedavého napätia s uhlovou frekvenciou ω.

a) Vyjadrite vzťah pre komplexnú admitanciu $\boldsymbol{Y}$ cievky, ktorá zodpovedá uvedenej náhradnej schéme, a rozdeľte ju na reálnu a imaginárnu časť. (*Pozn.: Admitancia je komplexná vodivosť a je rovná prevrátenej hodnote komplexnej impedancie*)

b) Určte rezonančnú uhlovú frekvenciu ω_0, pri ktorej sa cievka správa ako ideálny rezistor a určte hodnotu impedancie Z_0 cievky v tomto prípade.

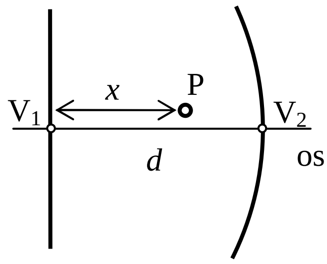
c) Zostrojte graf frekvenčnej závislosti relatívnej veľkosti (modulu) $|\boldsymbol{Z}/Z_0|$ a argumentu φ impedancie cievky pre hodnoty R = 5,0 Ω, L = 1,0 mH, C = 10 pF a G = 80 μS v rozsahu uhlovej frekvencie od $\omega_0 \times 10^{-4}$ do $\omega_0 \times 10^{4}$. Pri zostrojení grafov použite logaritmickú stupnicu pre uhlovú frekvenciu a pre relatívnu veľkosť impedancie. Stupnicu pre argument impedancie zvoľte lineárnu. *Pozn.: Pre zostrojenie grafov použite počítač, napr. tabuľkový procesor EXCEL*.

d) Z grafu určte interval frekvencie (ω_1, ω_2), v ktorom sa cievka správa ako induktor s hodnotu faktoru kvality $Q = \mathrm{tg}\varphi > 1$. Určte uhlovú frekvenciu ω_{max}, pri ktorej má cievka ako induktor najväčšiu hodnotu Q_{max} faktoru kvality Q, a hodnotu Q_{max}.

e) Pomocou grafov posúďte, ako sa cievka správa v rozsahoch uhlovej frekvencie $\omega \ll \omega_1$, $\omega \gg \omega_2$ v blízkom okolí ω_0 a $\omega \gg \omega_0$.

4. Optická sústava

Centrovaná optická sústava pozostáva z rovinného zrkadla a zrkadla dutého s polomerom krivosti R = 40 cm, obr. A–2. Vzdialenosť vrcholu V_2 dutého zrkadla od vrcholu V_1 rovinného zrkadla je d. Medzi zrkadlovými plochami sa nachádza bodový predmet P v malej vzdialenosti $y << R$ od optickej osi.



Obr. A–2

a) Odvoďte vzťah pre vzdialenosť x predmetu P od rovinného zrkadla, aby boli primárne obrazy O_{11} a O_{21} vytvorené obidvomi zrkadlami v rovnakej vzdialenosti od predmetu P meranej v rovnobežnom smere s osou.
b) Nakreslite schému optickej sústavy pre jednotlivé prípady a vyznačte v nej chod významných lúčov a polohy primárnych obrazov predmetu. Uveďte vlastnosti obidvoch primárnych obrazov O_{11} a O_{21} pre jednotlivé prípady.
c) Určte vzdialenosť x pre tri prípady: d_1 = 35 cm, d_2 = 50 cm a d_3 = 90 cm a jednotlivé prípady graficky znázornite v zodpovedajúcej mierke.

Pozn.: Primárny obraz vzniká priamym zobrazením predmetu zrkadlom, sekundárne obrazy vznikajú zobrazením primárneho obrazu pomocou druhého zrkadla (obraz obrazu). Podobne vznikajú ďalšie obrazy – terciárne, ...

5. Thomsonov model atómu vodíka

Poznávanie zákonitostí sveta, v ktorom človek žije, pripomína dobrodružnú cestu, na ktorej sa nachádzajú významné objavy a s nimi spojené osobnosti. V roku 2013 uplynie 100 rokov od publikovania prvého kvantového modelu atómu vodíka, ktorý predstavil Niels Bohr (1885 – 1962, Nobelova cena za fyziku v roku 1922). Na začiatku modernej časticovej fyziky stál Joseph John Thomson (1856 – 1940, Nobelova cena za fyziku 1906). J. J. Thomson v roku 1897 objavil elektrón pomocou experimentov s katódovým žiarením a v roku 1904 predstavil svoju predstavu o stavbe atómu, tzv. „pudingový model". Jeho žiak Ernest Rutherford (1871 – 1937, Nobelova cena 1908 za chémiu) roku 1911 experimentálne potvrdil existenciu atómového jadra a predstavil „planetárny model" atómu. Zásadné nedostatky tohto modelu odstránil Niels Bohr zavedením kvantového modelu atómu. Vývoj predstáv potom pokračoval v rámci modernej kvantovej teórie.


Joseph John Thomson

Uvažujte Thomsonov model atómu vodíka, v ktorom je kladný náboj s veľkosťou e rovnomerne rozložený v celom jeho objeme (predpokladáme, že atóm má tvar gule). Elektrón s nábojom $-e$ sa pohybuje ako bodová častica po kružnici so stredom v strede gule. Predpokladajte ďalej, že pre elektrón platí Bohrova kvantová podmienka, podľa ktorej môže orbitálny moment hybnosti L elektrónu pri pohybe po kružnici nadobúdať iba celočíselné násobky elementárneho kvanta momentu hybnosti $L = n\hbar$, kde $\hbar = h/(2\pi) \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J·s je Planckova konštanta a n kvantové číslo orbity.

a) Odvoďte vzťah pre veľkosť intenzity E elektrického poľa kladne nabitej gule s nábojom e a polomerom R pre body vo vnútri gule i mimo nej ako funkciu vzdialenosti r od jej stredu.

b) Určte polomer r_1 kružnice, po ktorej sa pohybuje elektrón v základnom stave pre $n = 1$, ak je polomer r_2 orbity elektrónu na druhej kvantovej hladine, $n = 2$, rovný polomeru R. Určte polomer r_3 orbity elektrónu na tretej kvantovej hladine, $n = 3$.

c) Určte energiu elektrónu v stavoch $n = 1$, 2 a 3. Aké sú hodnoty λ_{12} a λ_{23} vlnovej dĺžky fotónu, ktorú by atóm podľa uvedeného modelu vyžiaril pri prechode elektrónu z druhej hladiny na prvú, resp. z tretej na druhú.

d) Bolo by možné na základe merania vlnovej dĺžky vyžarovaných fotónov vyvrátiť predstavu o rovnomernom rozložení kladného náboja v celom objeme atómu vodíka, ak by platila podmienka $R = r_1$?

6. Vlhkosť vzduchu

Často diskutovanou príčinou ochorenia respiračného (dýchacieho) systému človeka počas zimných mesiacov je nízka relatívna vlhkosť vzduchu. Preto sa používajú rôzne zvlhčovače. V noci poklesla teplota vzduchu až na teplotu t_1 = -10 °C a časť vody obsiahnutej vo vzduchu sa vyzrážala ako srieň, ktorý pokryl trávniky, stromy a ďalšie objekty.

a) Aká je v tomto prípade relatívna vlhkosť η_1 vzduchu? Určte hmotnosť m_1 vody, obsiahnutej v objeme $V_1 = 1{,}0\ \mathrm{m}^3$ vzduchu za uvedených podmienok.

Intenzívnym vetraním sa vymení vzduch v miestnosti za mrazivý vzduch s teplotou t_1 a relatívnou vlhkosťou η_1 a ten sa potom izobaricky zohreje na izbovú teplotu t_2 = 20 °C. Relatívna vlhkosť sa pri zohriatí zmení na hodnotu η_2.

b) Určte hodnotu η_2 relatívnej vlhkosti vzduchu pri teplote t_2 a hmotnosť m_2 vody obsiahnutej vo tomto vzduchu v miestnosti s objemom V_2 = 3,5 m x 2,5 m x 6,0 m. Aké by boli uvedené výsledky, keby bola v „prekúrenej" miestnosti teplota t_3 = 30 °C?

Podľa hygienických noriem by mala mať relatívna vlhkosť v obývanom priestore hodnotu od 40 % do 60 %. Na základe predchádzajúceho výsledku posúďte, či budú po vyvetraní miestnosti vhodné vlhkostné podmienky v miestnosti.

c) Určte hmotnosť m_o vody, ktorú treba v uvedenej miestnosti odpariť, aby sa pri teplote t_2 zvýšila relatívna vlhkosť vzduchu na hodnotu η_4 = 45 %.

d) Určte pomer k tepelnej kapacity pri konštantnom objeme vodnej pary obsiahnutej vo vzduchu a celkovej tepelnej kapacity pri konštantnom objeme vlhkého vzduchu, ak je pri teplote t_2 relatívna vlhkosť η_4.

Vzduch s teplotou t_2 a relatívnou vlhkosťou η_4 uzatvoríme piestom vo valci s objemom $V_3 = 5{,}0\ \mathrm{dm}^3$. Potom začneme posúvaním piestu objem vzduchu zväčšovať až na hodnotu V_4, pri ktorej začne voda vo valci kondenzovať.

e) Určte objem V_4 ak predpokladáme, že dej vo valci je adiabatický a berieme do úvahy výsledok časti c). *Pozn.: Pri riešení tejto úlohy môžete použiť vhodnú numerickú alebo grafickú metódu.*

Závislosť tlaku nasýtenej vodnej pary od teploty vyhľadajte v MF tabuľkách. Tabuľku možno vyhľadať na adrese http://www.dmc.fmph.uniba.sk/public_html/pub/lectures/Ev.htm.

Vodnú paru i v stave nasýtenia považujte za ideálny plyn. Všetky potrebné konštanty vyhľadajte v MF tabuľkách. Atmosférický tlak p_a = 100 kPa.

7. Meranie relatívnej elektrickej konštanty (relatívnej permitivity) dielektrika – experimentálna úloha

Zadanie

Odmerajte relatívnu elektrickú konštantu (relatívnu permitivitu) ε_r rôznych materiálov. Použite tenké vrstvy papiera, igelitu, celofánu, skla a pod., ako aj kvapalín vody (destilovanej) a glycerínu.

Postup

1. Vytvorte doskový kondenzátor pomocou dvoch vodivých platní s rovinným povrchom. Na elektródy možno použiť napr. sklenené dosky s veľkosťou približne 10 x 10 cm^2 s nalepenou hliníkovou fóliou (Alobal). V prípade fólií tuhých látok vložte fóliu medzi hliníkové fólie a riadne pritlačte. Tak vytvoríte kondenzátor. V prípade kvapalín uložte elektródy v zvislom smere, nastavte ich vzdialenosť (pribl. 2 mm) a po bokoch utesnite. Medzeru medzi elektródami vyplňte kvapalinou.
2. Vytvorený kondenzátor spojte do série s rezistorom s odporom R a pripojte na zdroj striedavého napätia s frekvenciou približne 10 kHz. Približným výpočtom odhadnite kapacitu vytvoreného kondenzátora C a impedanciu Z_C kondenzátora pri frekvencii f napätia zdroja. Hodnotu odporu R rezistora voľte tak, aby približne zodpovedala impedancii Z_C. Vyberte príslušnú súčiastku a pomocou multimetra odmerajte jej presnú hodnotu odporu R.
3. Po pripojení na zdroj zmerajte multimetrom napätie na rezistore U_R a na kondenzátore U_C. Z nameraných hodnôt určte kapacitu kondenzátora a potom relatívnu elektrickú konštantu použitého dielektrika s použitím vzťahu pre kapacitu doskového kondenzátora. Pre zmeranie rozmerov elektród a hrúbky dielektrika použite čo najpresnejšiu metódu.

Úlohy

1. Pre päť rôznych materiálov fólií vyhľadajte tabuľkové hodnoty relatívnej elektrickej konštanty (stačí približný odhad), vypočítajte zodpovedajúce hodnoty kapacity C a navrhnite vhodné hodnoty odporu R pre merací obvod.
2. Zostavte merací obvod s použitím navrhnutých rezistorov a zostrojených kondenzátorov, po pripojení na zdroj napätia odmerajte príslušné napätia, vypočítajte zodpovedajúce hodnoty kapacít kondenzátorov a pre jednotlivé dielektriká určte hodnoty relatívnej elektrickej konštanty ε_r.
3. Pre jeden z použitých materiálov zopakujte meranie s kondenzátormi s kapacitami C_n, ktoré obsahujú postupne n = 1 až 5 vrstiev fólie. Zostrojte graf závislosti kapacity C_n od 1/ n a overte, že je táto závislosť lineárna. Metódou lineárnej regresie nájdite optimálnu priamku prechádzajúcu jednotlivými bodmi a pomocou získaných parametrov priamky určte kapacitu $C^{(1)}$ zodpovedajúcu jednej vrstve dielektrika. Túto hodnotu porovnajte s hodnotu C_1 nameranú pre kondenzátor s jednou fóliou.
4. Odhadnite presnosť merania relatívnej elektrickej konštanty ε_r použitou metódou.

Fyzikálna olympiáda, 54. Ročník – Úlohy školského kola kategórie A

Autori úloh:	Dušan Nemec (1), Ivo Čáp (2–7), Aba Teleki (2), Arpád Kecskés (4)
Recenzia:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha, Mária Kladivová
Redakčná úprava:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012