Fyzikálna olympiáda
54. ročník, 2012/2013
školské kolo
kategória B
riešenie úloh

1. *Satelit Slnka*

a) Zo zadania vyplýva pre stav termodynamickej rovnováhy satelitu

$k\,P_S = P_v$, 1 bod

kde P_S je celkový výkon žiarenia dopadajúceho na satelit zo Slnka a P_v je výkon žiarenia vyžarovaného do priestoru zo satelitu. Faktor absorpcie $k = 1 - r$.

Výkon vyžiarený povrchom Slnka je podľa Stefan–Boltzmannovho zákona

$P_{S0} = 4\pi R_S^2\, \sigma\, T_S^4$. 1 bod

Predpokladáme, že žiarenie sa šíri od Slnka vo všetkých smeroch rovnomerne (izotropné vyžarovanie). Výkon žiarenia pripadajúci na jednotku kolmej plochy vo vzdialenosti r_o od (stredu) Slnka

$k_S = \dfrac{4\pi R_S^2\, \sigma\, T_S^4}{4\pi r_o^2}$. 1 bod

Ak priemer Slnka vidno zo vzdialenosti r_o pod uhlom α (v jednotkách rad), je $R_S/r_o = \alpha / 2$, je solárna konštanta vo vzdialenosti r_o

$k_S = \dfrac{\alpha^2\, \sigma\, T_S^4}{4}$, pre dané hodnoty $k_S \approx 1{,}20\ \mathrm{kW\cdot m^{-2}}$. 2 body

b) Výkon žiarenia dopadajúceho na povrch satelitu

$P_S = k_S\, \pi R^2$. 1 bod

Ak je r faktor odrazu povrchu satelitu, resp. k faktor absorpcie, vyžaruje povrch satelitu s teplotou T výkon

$P_v = k\,\sigma T^4\, 4\pi R^2$. 1 bod

Pozn.: Podľa Kirchhoffovho zákona je faktor absorpcie rovný faktoru emisivity.

V stave rovnováhy je absorbovaný výkon $k\,P_S$ rovný výkonu vyžiarenému

$k\,k_S\, \pi R^2 = k\,\sigma T^4\, 4\pi R^2$,

odkiaľ dostaneme

$T = T_S \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2}$, pre dané hodnoty $T \approx 270$ K. 1 bod

c) Teplota satelitu zodpovedá približne priemernej teplote povrchu Zeme.

Udávaná solárna konštanta pre Zem je $k_{SZ} = 1{,}36\ \mathrm{kW\cdot m^{-2}}$. Táto hodnota je blízka hodnote pre satelit.

Zo zadanej uhlovej veľkosti Slnka $\alpha = 2\,R / r_o$ s uvážením polomeru Slnka $R_S \approx 6{,}96 \times 10^8$ m, dostaneme $r_o \approx 1{,}6 \times 10^{11}$ m.

Všetky výsledky ukazujú, že satelit sa nachádza vo vzdialenosti od Slnka, ktorá je o málo väčšia ako je vzdialenosť Zeme od Slnka $d \approx 150$ mil. km. 2 body

2. Hod kladivom

a) Športovec uvoľní lanko v bode kružnicovej trajektórie, v ktorom okamžitá rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$stredu gule leží v rovine predpokladanej trajektórie letu gule. Vektor $\boldsymbol{v}_0$ zviera s vodorovnou rovinou uhol β . Pre predpokladanú dĺžku s šikmého vrhu platí $s = \dfrac{v_0^{\,2}\sin(2\beta)}{g}$. Z toho veľkosť začiatočnej rýchlosti je

$v_0 = \sqrt{\dfrac{s\,g}{\sin(2\beta)}}$. Pre dané hodnoty veličín $v_0 \approx 29{,}4$ m.s^{-1}. 2 body

b) Polomer otáčania kladiva je rovný $R = r + l = 2{,}0$ m. Potom uhlová rýchlosť kladiva v okamžiku jeho uvoľnenia (obvodová rýchlosť gule má veľkosť v_0) je $\omega = \dfrac{v_0}{R}$.

Touto uhlovou rýchlosťou sa kladivo otáča počas celej doby jeho letu vzduchom, lebo na kladivo nepôsobí žiadny brzdiaci moment sily. 1 bod

Vypočítame čas t_d letu kladiva

$t_\mathrm{d} = \dfrac{2v_0\sin\beta}{g}$. Pre dané hodnoty veličín $t_\mathrm{d} \approx 4{,}59$s. 1 bod

Kladivo počas celého letu sa otáča s periódou $T = 2\,\pi/\,\omega = 2\,\pi\,\mathrm{R}/v_0$.

Počet otáčok kladiva počas jeho letu je

$N = t_d\,/\,T = \dfrac{t_\mathrm{d}v_0}{2\pi R}$.

Pre dané a vypočítané hodnoty veličín máme $N \approx 10{,}7$ otáčky. 1 bod

c) Zotrvačná sila pôsobiaca na lanko je

$F = mv_0^{\,2}/\,R$. Pre dané hodnoty veličín $F \approx 3{,}1$ kN. 1 bod

Táto sila zodpovedá hmotnosti $m' = F\,/\,g$, $m' \approx 316$ kg. 1 bod

d) Počet otáčok športovca počas celej doby roztáčania kladiva rovnomerne zrýchleným pohybom bol daný podielom uhlovej dráhy φa uhla 2 π rad

$$N_1 = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega^2}{4\pi\alpha} = \frac{v_0^2}{4\pi\alpha R^2}.$$

Pre dané a vypočítané hodnoty veličín $N_1 \approx 5{,}1$

e) Guľa konala rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici. Stredný výkon športovca vynaložený na roztáčanie kladiva (ak považujeme kinetickú energiu vlastnej rotácie gule za zanedbateľne malú)

$P = m\,v_0^{\,2}/(2\,t)$,

kde t je doba otáčania športovca od začiatku až po uvoľnenie kladiva .

Potom $P = \dfrac{m v_0^2\,\alpha}{2\,\omega_0} = \dfrac{m v_0\,R\alpha}{2}$. Pre dané hodnoty $P \approx 726$ W. 2 body

Ak vychádzame zo známeho výrazu pre kinetickú energiu otáčajúceho sa telesa $E_\mathrm{k} = I\,\omega^2/2$, kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, uvážime, aký vplyv na výsledok, napr. na hodnotu výkonu športovca, bude mať zanedbanie vlastných otáčok gule okolo svojej osi:

Pre moment zotrvačnosti kladiva (homogénnej gule) pre os vo vzdialenosti R od ťažiska platí Steinerova veta

$$I_k = mR^2 + I_0 = mR^2 + \frac{2}{5}m\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

kde I_0 je moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os prechádzajúcu jej ťažiskom.
Ak guľu považujeme za hmotný bod, jej moment zotrvačnosti je:

$$I_{hb} = mR^2.$$

Podiel daných momentov zotrvačností je

$$\frac{I_k}{I_{hb}} = 1 + \frac{2}{5}\left(\frac{d}{2R}\right)^2 \approx 1 + 4.10^{-4},$$

teda relatívna odchýlka, ak zanedbáme vlastné otáčky gule, je $p \approx 0{,}04\%$. Náš predpoklad o zanedbaní vlastných otáčok gule je opodstatnený.

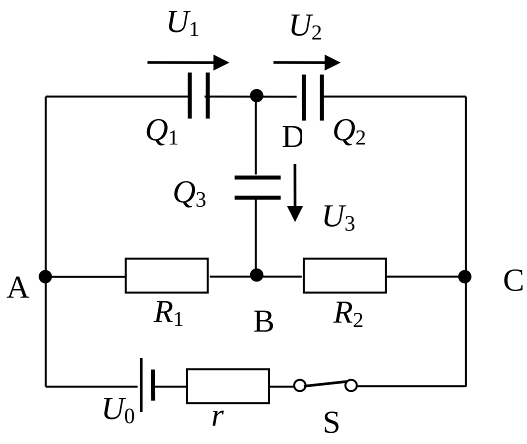
1 bod

3. *Kondenzátory*

a) Po zapnutí spínača zo zdroja začne prechádzať elektrický prúd všetkými šiestimi vetvami obvodu. Postupne sa budú nabíjať všetky tri kondenzátory. V ustálenom stave, po nabití kondenzátorov, elektrický prúd zo zdroja bude prechádzať len vetvou zdroja a vetvou rezistorov. Prúdy vo vetvách kondenzátorov v ustálenom stave budú nulové. Obr. RB-1.

2 body

b) Označme v ustálenom stave elektrického obvodu napätia a náboje na kondenzátoroch: U_1, U_2, U_3, Q_1, Q_2, Q_3, obr. RB-1. Z Ohmovho zákona platí:
napätie medzi uzlami AB $U_{AB} = R_1 I$,
napätie medzi uzlami BC $U_{BC} = R_2 I$,
kde $I = U_0/(R_1 + R_2 + r)$ je prúd prechádzajúci obvodom zdroja a rezistorov.
Pre dané hodnoty veličín
$U_{AB} = 7{,}06$ V, $U_{BC} = 3{,}53$ V.
Pre obvod ADB a potom obvod BDC
z 2. Kirchhoffovho zákona máme



Obr. RB-1

$U_1 + U_3 - U_{AB} = 0,$ (1) 1 bod

$-U_3 + U_2 - U_{BC} = 0.$ (2) 1 bod

Pre uzol B však platí

$Q_1 + Q_2 + Q_3 = -\mathrm{C}\,U_1 + \mathrm{C}\,U_2 + \mathrm{C}\,U_3 = 0$, tzn.

$-U_1 + U_2 + U_3 = 0.$ (3)

Z výrazov (1), (2), (3) vypočítame

$U_3 = U_{AB} - U_{BC}$. Pre dané hodnoty $U_3 \approx 1{,}18$ V. (4) 1 bod

Z (1) a (4) pre U_1 máme

$U_1 = U_{AB}U_3 = 2\,(U_{AB} + U_{BC})/3$.

Pre dané hodnoty veličín $U_1 \approx 5{,}88$ V. 1 bod

Z (2) a (4) dostaneme

$U_2 = U_3 + U_{BC} = (U_{AB} + 2\ U_{BC})/3$.

Pre dané hodnoty veličín $U_2 \approx 4{,}71$ V. 1 bod

c) Po vypnutí spínača sa kondenzátory, po dostatočne dlhom čase, vybijú cez rezistory s odpormi R_1 a R_2 (vetva so zdrojom je odpojená) . Zo zákona zachovania energie však vyplýva, že elektrická práca na rezistoroch je rovná súčtu začiatočných energií všetkých troch kondenzátorov.

1 bod

d) Ak W označíme elektrickú prácu vykonanú na rezistoroch a E_1 , E_2 , E_3 začiatočné energie kondenzátorov, z c) vyplýva

$W = E_1 + E_2 + E_3 = C\,(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)/2$.

Pre dané hodnoty veličín $W \approx 2{,}91$ mJ. 2 body

4. *Skrat ma vedení vysokého napätia*

a) Prúd vo vodičoch je

$I = P/U$,

pre dané hodnoty veličín $I = 227$ A. 1 bod

b) Zo zadania úlohy vyplýva, že v danom prípade na prenos elektrickej energie sa môže používať hliníkový vodič s prierezom $S = I/J_{max}$, $S = 227\ \mathrm{mm}^2$. Hmotnosť hliníkového vodiča s dĺžkou 1 m je $m_0 = \rho V = \rho\, S\, l$.

Pre dané hodnoty m ≈ 0,61 kg. 1 bod

c) Pre magnetickú silu pôsobiacu medzi vodičom s veľkou dĺžkou a rovnobežným vodičom vo vzdialenosti d s dĺžkou l, ak oboma vodičmi prechádza rovnaký prúd I v opačných smeroch, sila je odpudivá a jej veľkosť je

$$\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d},$$

pre dané hodnoty $F_1/l \approx 20{,}6\ \mathrm{mN\cdot m^{-1}}$. 2 body

Ak túto silu porovnáme s tiažovou silo $F_g = m_0 g \approx 6{,}0\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, môžeme vplyv magnetickej sily na zmenu vzdialenosti d považovať za zanedbateľne malú.

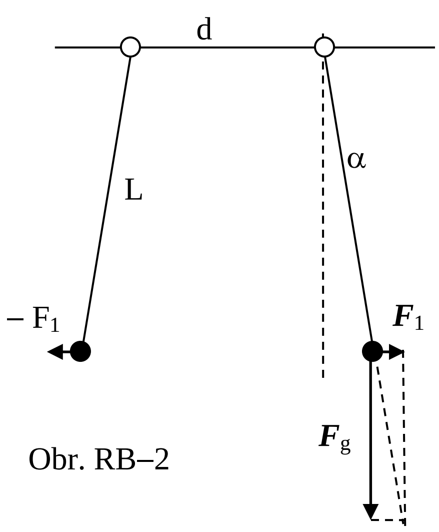
Pre uhlovú odchýlku α závesov od zvislého smeru, ak neberieme do úvahy hmotnosť závesov, potom platí (obr.RB-2)

$$\tan\alpha = \frac{F_1}{F_g} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2 l}{d}\frac{1}{\rho S l g}, \text{ resp.}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{\rho S d g}\right),$$

pre dané hodnoty $\alpha \approx 0{,}20°$. 2 body

Zmena vzdialenosti medzi vodičmi účinkom odpudivej sily je $\delta = 2\,L\sin\alpha \approx 3{,}5$ mm a teda predpoklad o zanedbateľnom vplyve na vzdialenosť vodičov je oprávnený.



Obr. RB–2

d) Ak dôjde ku krátkodobému skratu, vyvolá odpudivá sila na vodič impulz sily $p = F\,\tau$, ktorý uvedie vodič so závesom do kyvadlového pohybu. Vodiče sa vychýlia odpudivou silou o určitý maximálny uhol φ a potom sa pohybujú nazad a vychýlia sa o rovnaký uhol smerom ku sebe (fyzikálne kyvadlo). Ak sa majú pri spätnom pohybe vodiče dotknúť, musia sa vychýliť o uhol φ, pre ktorý platí

$\sin\varphi = \dfrac{d}{2L}$, pre dané hodnoty $\varphi \approx 14{,}5°$

Impulzom sily $F\tau$ nadobudne vodič za krátky čas τ (podstatne kratší ako perióda kyvadla) rovnako veľkú hybnosť p. Získaná kinetická energia $E_k = p^2/\,2m$ sa premení na potenciálnu $E_p = m\,g\,L\,(1 - \cos\varphi)$. Dostaneme tak rovnicu

$$\frac{F^2\,\tau^2}{2\,m} = m\,g\,(1-\cos\varphi)$$ 1 bod

a po dosadení a úprave

$$\left(\frac{\mu_0}{2\,\pi}\,\frac{I_{skr}^2\,l}{d}\right)^2 \frac{\tau^2}{2} = (\rho\,S\,l\,)^2\,g\,L\,(1-\cos\varphi)$$

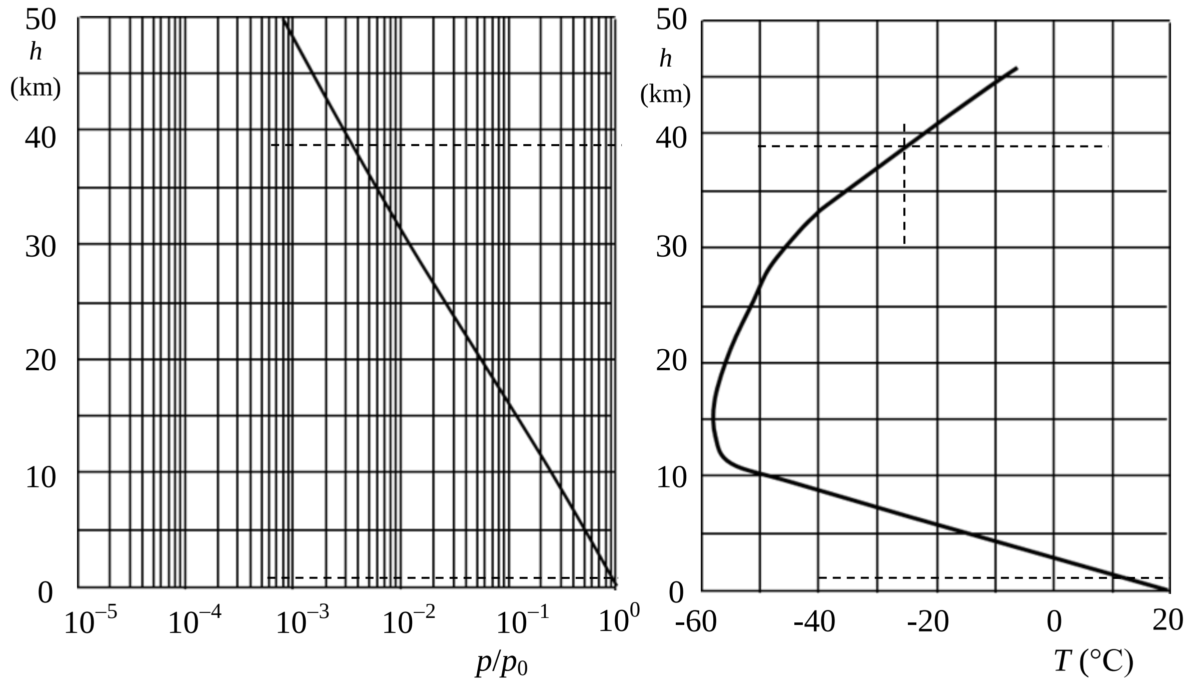
a ďalej

$$I_{skr} = \sqrt{\frac{2\,\pi\rho\,S\,d}{\mu_0\,\tau}\sqrt{2\,g\,(1-\cos\varphi)}}$$, pre dané hodnoty $I_{skr} \approx 11$ kA. 2 body

Doba kmitu kyvadla $T = 2\,\pi\,\sqrt{L\,/\,g} \approx 2{,}0$ s << τ. 1 bod

5. *Rekordný skok Felixa Baumgartnera*

Upozornenie na opravu označenia osi grafu v zadaní úlohy (označenie a stupnica tlaku v ľavom grafe). Uvádzame správne označenie, s ktorým, prosíme, oboznámte riešiteľov.



Obr.B–3. Závislosť tlaku a teploty atmosféry od výšky nad povrchom Zeme

a) Podmienka vznášania je rovnováha medzi tiažovou a vztlakovou silou.

Pri napúšťaní sa balón rozmerovo prispôsobuje nulovému rozdielu vnútorného a vonkajšieho tlaku. Na začiatku je tlak vo vnútri balóna rovný atmosférickému tlaku p_0 na povrchu Zeme. Pri pomalom stúpaní sa plyn ochladzuje a keďže okolitý tlak vzduchu klesá, narastá objem balóna tak, aby sa prispôsobil tlak hélia vo vnútri vonkajšiemu tlaku. Stúpanie sa zastaví, keď balón dosiahne svoj maximálny objem V_m a ďalej sa už rozpínať nemôže. Vo výške h_m platí

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_\mathrm{He})\, g = V_\mathrm{m}\, \rho_\mathrm{m}\, g\,.$$

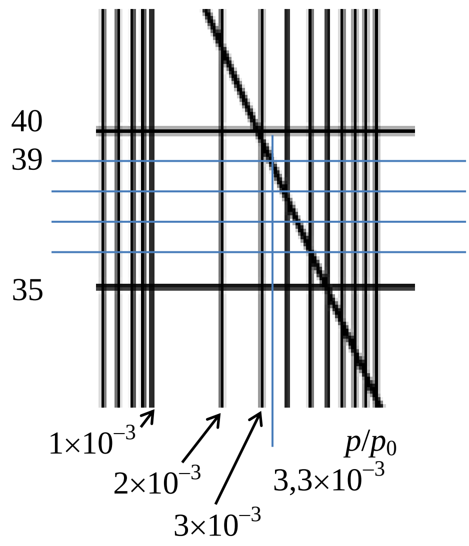
Hustota vzduchu vo výške h_m

$$\rho_\mathrm{m} = \frac{p_1\, M_{vz}}{RT_\mathrm{m}}\ ,$$

kde tlak p_1 a teplotu T_m určíme z grafov v zadaní (teplota vzduchu $T_\mathrm{m} \approx 248$ K (–25 °C),

$p_1 \approx 3{,}3\times10^{-3}\, p_0 \approx 330$ Pa.

Na obrázku je naznačené odčítanie z uvedenej logaritmickej stupnice. Stupnica rádov je lineárna, pomocné čiary v grafe v nelineárnom usporiadaní však označujú pomery p/p_0. Výške 39 km tak zodpovedá pomer $3{,}3\times10^{-3}$.



Tlak hélia v balóne vo výške h_m je p_1 a teplota T_m a teda

$$\frac{p_1\, V_\mathrm{m}}{RT_\mathrm{m}} = \frac{m_\mathrm{He}}{M_\mathrm{He}}\text{, tzn. } \rho_\mathrm{m} = \frac{m_\mathrm{He}}{M_\mathrm{He}}\frac{M_{vz}}{V_\mathrm{m}}\,.$$

Rovnica rovnováhy dostane tvar

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_\mathrm{He} = m_\mathrm{He}\frac{M_{vz}}{M_\mathrm{He}}\ ,$$

odkiaľ dostaneme

$$m_\mathrm{He} = (m_1 + m_2 + m_3)\frac{M_\mathrm{He}}{M_\mathrm{vz} - M_\mathrm{He}}$$

a pre dané hodnoty $m_\mathrm{He} \approx 505$ kg. 1 bod

Maximálny objem balóna vo výške h_m

$$V_\mathrm{m} = \frac{R\,T_\mathrm{m}}{p_1}\frac{m_1 + m_2 + m_3}{M_{vz} - M_\mathrm{He}} \approx 870\times10^3\ \mathrm{m}^3\ ,$$

čomu za predpokladu tvaru gule zodpovedá priemer

$$d_\mathrm{m} = \sqrt[3]{\frac{6\,V_\mathrm{m}}{\pi}} \approx 114\ \mathrm{m}$$ 1 bod

Pri štarte je objem balóna

$$V_0 = \frac{m_\mathrm{He}}{M_\mathrm{He}}\frac{RT_0}{p_0}$$

a pre dané hodnoty $V_0 \approx 3{,}05\times10^3\ \mathrm{m}^3$ (v mieste štartu je teplota vzduchu $T_0 \approx 293$ K (20 °C))

1 bod

b) Hustota vzduchu vo výške h_m

$$\rho_\mathrm{m} = \frac{p_1\, M_\mathrm{vz}}{R\, T_\mathrm{m}}$$, pre dané hodnoty $4{,}7\times10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

a pomer k hustote vzduchu v mieste štartu

$$\frac{\rho_\mathrm{m}}{\rho_0} = \frac{p_\mathrm{m}\, T_0}{p_0\, T_\mathrm{m}}$$, pre dané hodnoty $\rho_\mathrm{m}/\rho_0 \approx 3{,}9\times10^{-3}$.

2 body

c) Za predpokladu nulového odporu vzduchu ide o voľný pád so zrýchlením g. Čas potrebný na dosiahnutie rýchlosti zvuku vo vzduchu (pri teplote vzduchu −25 °C je rýchlosť šírenia zvuku približne $310\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$)

$$t_1^* = \frac{v_s}{g}$$, pre dané hodnoty $t_1^* \approx 31{,}6$ s.

Túto rýchlosť by skokan dosiahol vo výške

$$h_1^* = h_\mathrm{m} - \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g}$$, pre dané hodnoty $h_1^* \approx 34{,}15$ km.

V skutočnosti dosiahol rýchlosť zvuku za čas 40 s a vo výške 33,5 km, tzn., že odpor vzduchu sa i pri tak nízkej hustote vzduchu prejavil. časť c) 2 body

d) Maximálnu rýchlosť pádu dosiahol skokan vo výške $h_2 = 30{,}5$ km. Z grafov určíme pre túto výšku tlak a teplotu vzduchu $p_2 \approx 1{,}1\times10^{-2} p_0 \approx 1{,}11$ kPa, $T_2 \approx 227$ K (−46 °C). Hustota vzduchu pri týchto podmienkach je

$$\rho_2 = \frac{p_2\, M_\mathrm{vz}}{R\, T_2}$$, pre dané hodnoty $\rho_2 \approx 17\times10^{-3}\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Pri dosiahnutí maximálnej rýchlosti je v rovnováhe tiažová sila a sila odporu vzduchu

$$m_3\, g = \frac{1}{2}\rho_2\, v_m^2\, S_x\, c_x\ , \text{ odkiaľ } S_x = \frac{2\, m_3\, g}{c_x\, \rho_2\, v_m^2}$$ a pre dané hodnoty $S_x \approx 9{,}0\ \mathrm{m}^2$.

Efektívny obsah prierezu je výrazne väčší ako reálny prierez skokana, nakoľko sa pri nadzvukovej rýchlosti vytvára „kompresný lievik“, ktorý zvyšuje odpor oproti štandardnému turbulentnému obtekaniu.

časť d) 2 body

e) Keď skokan padá, prispôsobuje sa jeho rýchlosť rovnováhe medzi tiažovou a odporovou silou. Skokan tiež zaujme polohu „naplocho“ a padá do hustejšieho vzduchu. Vo výške h_3 sú podmienky $p_3 \approx 0{,}9\, p_0 \approx 91$ kPa a $T_3 \approx 286$ K (13 °C), čomu zodpovedá hustota vzduchu

$$\rho_3 = \frac{p_3\, M_\mathrm{vz}}{R\, T_3}$$, pre dané hodnoty $\rho_3 \approx 1{,}1\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Rýchlosť pádu skokana v tejto výške

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\, m_3\, g}{\rho_3\, S_x\, c_x}}$$, pre dané hodnoty $v_3 \approx 40\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (≈ 140 km/h). 1 bod

Pozn.: Pri „nízkej“ (podzvukovej) rýchlosti zodpovedá obsah plochy priečneho prierezu reálnej hodnote.
Pozn. pre hodnotiteľov: Pri hodnotení úlohy je potrebné brať do úvahy, že hodnoty veličín získané z grafov na obr. B – 3 a pomocou nich vypočítané veličiny majú nanajvýš presnosť danú dvoma platnými číslicami. Tiež teplotu T_0 v časti a) úlohy si riešiteľ môže zvoliť o niekoľko teplotných stupňov inú, ako je uvedená v inštruktážnom riešení.

6. Vrh cez prekážku

a) Pre zložky vektora rýchlosti a súradnice gule platia vzťahy

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g\,t$$

$$x = v_0\, t \cos \alpha\,, \qquad y = v_0\, t \sin \alpha - (1/2)\, g\, t^2\,.$$

Pre najvyšší bod trajektórie platí podmienka $v_y = 0$, z ktorej určíme čas a hodnotu súradnice y v tomto bode

$$t_\mathrm{m} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha\,, \qquad h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha\,.$$ 2 body

Polomer krivosti možno určiť zo vzťahu pre dostredivé zrýchlenie. V najvyššom bode trajektórie je tiažová sila kolmá na smer pohybu a teda dostredivé zrýchlenie $a_\mathrm{n} = F_\mathrm{g}/m = g$. Keďže rýchlosť v najvyššom bode je $v_\mathrm{m} = v_0 \cos\alpha$, platia pre dostredivé zrýchlenie a následne pre polomer krivosti vzťahy

$$a_\mathrm{n} = g = \frac{v_\mathrm{m}^2}{r} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{r}\,, \text{ resp. } r_m = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}\,.$$ 2 body

b) Pre daný uhol vrhu α zodpovedá minimálna rýchlosť vrhu v_0 trajektórii, ktorá sa povrchu polgule dotkne v jedinom bode (v tom bode má vektor rýchlosti smer dotyčnice k povrchu polgule). Ak je bod dotyku mimo vrcholu polgule, existujú dve rôzne vzdialenosti d, pričom pri menšej je bod dotyku na prednej strane polgule, pri väčšej na zadnej. Minimálna rýchlosť zodpovedá dotyku polgule v najvyššom bode (vrchole).
Pre prechod vrcholom polgule platí

$$\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = R\,, \text{ resp. } v_0^2 \sin^2 \alpha = 2\,g\,R\,.$$

Pre danú výšku R hľadáme minimálnu vodorovnú rýchlosť prechodu polgule. Ak má byť trajektória dotyčnicová z vonkajšej strany, musí byť polomer krivosti trajektórie v bode dotyku $r \geq R$. Pre hraničnú podmienku platí

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = R\,, \text{ resp. } v_0^2 \cos^2 \alpha = g\,R\,.$$ správne zdôvodnenie 2 body

Z týchto rovníc dostaneme

$$v_{01} = \sqrt{3\,g\,R}\,,$$ 1 bod

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sqrt{2}\,.$$ 1 bod

Je to uhol $\alpha_1 \approx 54{,}7\,^\circ$, ktorý nie je závislý od polomeru R prekážky.
Vodorovná súradnica vrcholu trajektórie vzhľadom na bod vrhu je

$$x_{m1} = (v_{01} \cos\alpha_1)\, t_{m1} = \frac{v_{01}^2}{g} \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \ .$$

Ak dosadíme podmienky minimálnej rýchlosti je vzdialenosť katapultu od päty polgule

$$d = x_{m1} - R = \frac{v_{01}^2}{g} \frac{\tan\alpha_1}{1+\tan^2\alpha_1} - R = R\left(\sqrt{2}-1\right).$$ 2 body

7. *Vyšetrovanie kmitov fyzikálneho kyvadla – experimetálna úloha* 10 bodov

Fyzikálna olympiáda, 54. ročník– Úlohy školského kola kategórie B

Autori úloh: Daniel Kluvanec (B1-B3), Dušan Nemec (B2), Ľubomír Konrád (B3), Ivo Čáp (B4-B7)

Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp

Redakčná úprava: Ivo Čáp

Vydal: Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012