

55. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2013/2014

Riešenie teoretických úloh celoštátneho kola kategórie A

Prešov, 11. apríla 2014

1. Pružinová váha

- a) Na začiatku a pri dosiahnutí maximálnej výchylky je sústava v pokoji. Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že na začiatku a pri maximálnej výchylke je potenciálna energia rovnaká. Potenciálna energia má zložku gravitačnú a elastickú (pružina). Deformovaná pružina má na začiatku energiu

$$E_{p0} = (1/2) k (l - l_0)^2 = (1/2) k (\Delta l)^2.$$

Keď sa miska vychýli o x_m z rovnovážnej polohy do krajnej polohy, pružina sa predĺži o $x_m/2$ a potenciálna energia pružiny sa zmení na hodnotu $E_{pm} = (1/2) k (\Delta l + x_m)^2$. Zmena potenciálnej energie pružiny je rovná zmene gravitačnej potenciálnej energie sústavy

$$\frac{1}{2} k \left(\Delta l + \frac{x_m}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 - (m + m_0) g x_m - M g \left(\frac{x_m}{2} \right) = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{odkiaľ } k \Delta l \frac{x_m}{2} + \frac{1}{2} k \left(\frac{x_m}{2} \right)^2 = \left(m + m_0 + \frac{M}{2} \right) g x_m. \quad (1)$$

Ak uvážime, že pôvodné predĺženie spôsobené kladkou a miskou je dané rovnicou

$$k \Delta l = Mg + 2m_0 g, \quad (2) \quad 1 \text{ bod}$$

lebo ťahová sila vo vlákne na ľavej strane má tiež hodnotu $m_0 g$. Pre maximálnu výchylku z (1) a (2) dostaneme

$$x_m = \frac{8 m g}{k} \quad (3)$$

$$\text{a teda } h_m = h_0 - x_m = h_0 - \frac{8 m g}{k}.$$

Pre dané hodnoty $h_m \approx 120 \text{ mm}$.

2 body

Pozn.: K výsledku možno dospieť aj v rámci riešenia časti b). Oba postupy sú správne.

- b) Pred vložením telesa je sústava v rovnováhe. Vlákno, na ktorom je zavesená miska je napínané silou $F_0 = m_0 g$. Po vložení telesa sa začne sústava pohybovať, pričom sila vo vlákne sa zmení na $F = F_0 + \Delta F$. Posunutie misky z pôvodnej polohy označíme x a jej zrýchlenie a . Keďže ľavý okraj kladky sa v danom okamihu nepohybuje, predstavuje okamžitý stred otáčania. Uhlové zrýchlenie $\alpha = a/(2r)$. Pružina sa predĺži o $x/2$. Pohybové rovnice kladky a misky s telesom majú tvar

$$(I_0 + M r^2) \alpha = -k \left(\frac{x}{2} \right) r + \Delta F (2r)$$

$$(m_0 + m) a = (m_0 + m) g - F = m g - \Delta F.$$

2 body

Sústavu upravíme vylúčením premennej ΔF

$$[I_0 + M r^2 + (m_0 + m)(2r)^2] a = -r^2 k x + m g (2r)^2.$$

Pravú stranu možno vyjadriť v tvare

$$-r^2 k x + m g (2r)^2 = -r^2 k (x - x_1)$$

kde $x_1 = \frac{4}{k} m g$ je výchylka zo začiatkovej polohy, pri ktorej je nulové zrýchlenie a ktorej teda zodpovedá nová rovnovážna poloha sústavy. Ak zavedieme výchylku $y = x - x_1$ z tejto rovnovážnej polohy, dostaneme pohybovú rovnicu

$$a = -\frac{r^2 k}{I_0 + M r^2 + (m_0 + m)(2r)^2} y,$$

ktorá predstavuje rovnicu harmonických kmitov ($a = -\omega^2 y$) s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{2k r^2}{I_0 + M r^2 + 4(m_0 + m) r^2}}. \quad (4)$$

2 body

Hodnota $y_m = x_1$ predstavuje amplitúdu A a $x_m = 2 x_1$ maximálnu výchylku misky zo začiatkovej polohy – pozri riešenie časti a).

Frekvencia f a amplitúda $A = x_m/2$, ako to vyplýva z (3) a (4), sú

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k r^2}{I_0 + M r^2 + 4(m_0 + m) r^2}}$$

$$A = \frac{4}{k} m g.$$

Pre dané hodnoty veličín $f \approx 3,07 \text{ s}^{-1}$, $A \approx 15,1 \text{ mm}$.

2 body

2. Opozícia Marsu

a) Obrázok RA3–1.

V čase opozície je osvetlený Mars celú noc, a preto sú vhodné podmienky pre jeho pozorovanie zo Zeme.

1 bod

b) Za predpokladu kružnicových trajektórií z 3. Keplerovho zákona máme

$$\left(\frac{R_M}{R_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2, \quad (1)$$

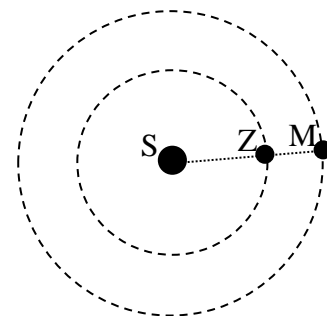
odkiaľ

$$R_M = R_Z \left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^{2/3} = R_Z k^{2/3},$$

pre dané hodnoty $R_M \approx 2,28 \times 10^{11} \text{ m}$.

1 bod

K nasledujúcej opozícii dôjde za čas τ , keď sa uhly α_Z a α_M sprievodičov Slnko–Zem a Slnko–Mars líšia o hodnotu $\Delta\alpha = \alpha_Z - \alpha_M = 2\pi$



Obr. RA3–1

$$(\omega_Z - \omega_M) \tau = \left(\frac{2\pi}{T_Z} - \frac{2\pi}{T_M} \right) \tau = 2\pi,$$

odkiaľ
$$\tau = \frac{T_M T_Z}{T_M - T_Z} = \frac{k}{k-1} T_Z = \frac{1}{k-1} T_M, \quad (2)$$

pre dané hodnoty $\tau \approx 780$ dní.

Keďže $\tau \approx 2,14 T_Z$ a $\tau \approx 1,14 T_M$, medzi dvomi po sebe nasledujúcimi opozíciami vykoná Zem viac ako 2 celé obehy a Mars viac ako 1 celý obchod okolo Slnka. 2 body

- c) Keďže medzi dvomi opozíciami prekoná Zem viac ako 2 obehy po kružnici, priamka opozície sa natočí za čas τ o uhol

$$\varphi = \frac{2\pi}{T_Z} \tau - 2 \cdot 2\pi = 2\pi \left(\frac{\tau}{T_Z} - 2 \right) = 2\pi \frac{2-k}{k-1}, \quad (3)$$

pre dané hodnoty $\varphi \approx 0,136 \times 2\pi \text{ rad} \approx 0,856 \text{ rad} \approx 49,1^\circ$.

1 bod

- d) Obrázok RA3–2. Slnko S sa nachádza v ohnisku F elipsy, AS = R_{\min} , SB = R_{\max} .

1 bod

- e) Plošnú rýchlosť je možné vyjadriť pomocou obsahu elipsy a doby obehu

$$\sigma = \frac{S}{T_M} = \frac{\pi a b}{T_M},$$

kde $a = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}$, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$,

kde $e = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{2}$

a teda

$$\sigma = \frac{\pi}{T_M} a \sqrt{\left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} \right)^2 - \left(\frac{R_{\max} - R_{\min}}{2} \right)^2} = \frac{\pi}{T_M} a \sqrt{R_{\max} R_{\min}}.$$

Dĺžku hlavnej polosi eliptickej trajektórie Marsu určíme z 3. Keplerovho zákona

$$a = R_Z \left(\frac{T_M}{T_Z} \right)^{2/3} = R_Z k^{2/3}.$$

Plošná rýchlosť
$$\sigma = \frac{\pi}{k^{1/3} T_Z} R_Z \sqrt{R_{\max} R_{\min}}$$

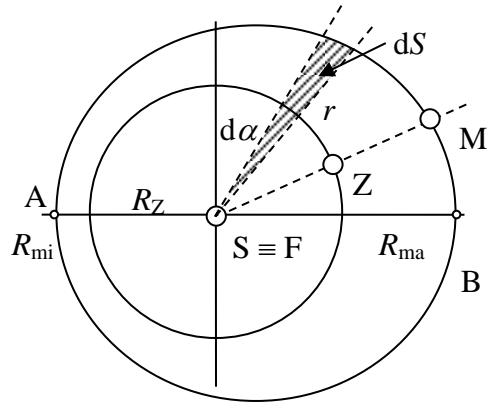
1 bod

S použitím obr. RA3–2 možno vyjadriť vzťah medzi plošnou a uhlovou rýchlosťou

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\frac{1}{2} r \times r d\alpha \right) = \frac{1}{2} r^2 \omega.$$

Extrémne hodnoty uhlovej rýchlosti sú potom

$$\omega_{\max} = \frac{2\sigma}{R_{\min}^2} = \frac{2\pi R_Z}{k^{1/3} T_Z} \frac{\sqrt{R_{\max} R_{\min}}}{R_{\min}^2}, \quad \omega_{\min} = \frac{2\sigma}{R_{\max}^2} = \frac{2\pi R_Z}{k^{1/3} T_Z} \frac{\sqrt{R_{\max} R_{\min}}}{R_{\max}^2}.$$



Obr. RA3–2

1 bod

- f) Čas jednej periódy je konštantný, uhlová rýchlosť Zeme je tiež konštantná, iba uhlová rýchlosť Marsu sa mení počas periódy. Počas pohybu po uzatvorených cykloch sa nerovnomernosť neprejaví. Kolísanie času τ je spôsobené iba pohybom pozdĺž zvyšku orbity s uhlom približne φ . Keďže $\varphi < 1$ rad, môžeme považovať uhlovú rýchlosť v okolí extrémnych polôh približne za konštantnú (ω_{\min} alebo ω_{\max}).

Čas medzi dvomi opozíciami vyjadríme $\tau = T_M + t_M$. Pre po sebe nasledujúce opozície platí (pozn. Zem obehne 2×)

$$\omega_Z (T_M + t_M) = (\omega_M T_M + \omega t_M) + 2\pi, \text{ resp.}$$

$$t_M = \frac{(\omega_Z - \omega_M) T_M - 2\pi}{\omega - \omega_Z} = \frac{2\pi(2-k)}{\omega_Z - \omega}$$

Ak uhlový úsek φ uvažujeme v okolí afélie, je $\omega \approx \omega_{\min}$ a čas $t_M = t_{M1} = \tau_{\max} - T_M$. V okolí perihélie je $\omega \approx \omega_{\max}$ a $t_M = t_{M2} = \tau_{\min} - T_M$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\min} - T_M} - \frac{1}{\tau_{\max} - T_M} &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\pi(2-k)} = \frac{R_Z k^{-1/3}}{(2-k)T_Z} \left(\frac{\sqrt{R_{\max} R_{\min}}}{R_{\min}^2} - \frac{\sqrt{R_{\max} R_{\min}}}{R_{\max}^2} \right) = \\ &= \frac{R_Z k^{-1/3}}{(2-k)T_Z} \sqrt{R_{\max} R_{\min}} \frac{R_{\max} + R_{\min}}{R_{\min}^2 R_{\max}^2} (R_{\max} - R_{\min}) = \\ &= \frac{R_Z k^{-1/3}}{(2-k)T_Z} \frac{2a}{[(a+e)(a-e)]^{3/2}} (R_{\max} - R_{\min}) = \frac{R_Z k^{-1/3}}{(2-k)T_Z} \frac{2a}{a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} (R_{\max} - R_{\min}) \end{aligned}$$

Vzťah upravíme pre $\varepsilon \ll 1$

$$\frac{1}{\tau_{\min} - T_M} - \frac{1}{\tau_{\max} - T_M} \approx \frac{2}{(2-k)T_Z R_Z k^{5/3}} (R_{\max} - R_{\min}).$$

Pre extrémne vzdialenosti platí

$$R_{\max} - R_{\min} \approx \frac{(2-k)k T_Z}{2} \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{(\tau_{\min} - T_M)(\tau_{\max} - T_M)} R_Z k^{2/3}$$

$$R_{\max} + R_{\min} = 2a = 2R_Z k^{2/3}.$$

a odtiaľ

$$R_{\max} \approx \left[1 + \frac{(2-k)k T_Z}{4} \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{(\tau_{\min} - k T_Z)(\tau_{\max} - k T_Z)} \right] R_Z k^{2/3}$$

$$R_{\min} \approx \left[1 - \frac{(2-k)k T_Z}{4} \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{(\tau_{\min} - k T_Z)(\tau_{\max} - k T_Z)} \right] R_Z k^{2/3}.$$

Pre dané hodnoty máme

$$R_{\max} \approx 1,68 R_Z \approx 2,52 \times 10^{11} \text{ m}$$

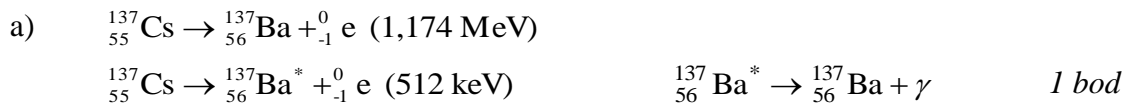
$$R_{\min} \approx 1,37 R_Z \approx 2,05 \times 10^{11} \text{ m.}$$

2 body

Pozn.: Astronomické ročenky udávajú pre uvedené veličiny nasledujúce hodnoty:

$R_{\min} \approx 1,38 R_Z$, $R_{\max} \approx 1,66 R_Z$, čo je vo veľmi dobrej zhode s výsledkami výpočtu.

3. Rádioaktívne cézium Cs 137



b) S použitím klasického vzťahu pre kinetickú energiu máme

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}}, \text{ pre dané hodnoty veličín } v_1 \approx 6,42 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, v_2 \approx 4,24 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Z výsledku vidno, že v obidvoch prípadoch vychádza $v > c$, tzn. častice β sa správajú ako relativistické.

Kinetická energia $E = (m - m_e) c^2$, pričom $m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$. Odtiaľ

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E} \right)^2}, \quad 2 \text{ body}$$

pre dané hodnoty $v_1 \approx 0,952 c \approx 2,86 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2 \approx 0,866 c \approx 2,60 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

c) Rozdiel kinetickej energia β -elektrónov zodpovedá rozdielu ΔE energie excitovaného a základného stavu jadra bária. Pri relaxácii z excitovaného stavu do základného stavu sa emituje fotón, ktorého energia zodpovedá tomuto rozdielu

$$E_\gamma = E_1 - E_2 \approx 662 \text{ keV}.$$

Vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma}, \text{ pre dané hodnoty } \lambda \approx 1,88 \times 10^{-12} \text{ m} = 1,88 \text{ pm}. \quad 1 \text{ bod}$$

d) Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že hybnosť jadra má rovnakú veľkosť ako hybnosť fotónu

$$p_{\text{Ba}} = m_{\text{Ba}} v_{\text{Ba}} = \frac{E_\gamma}{c}, \text{ a teda } v_{\text{Ba}} = \frac{E_\gamma}{m_{\text{Ba}} c} = \frac{E_\gamma}{A_{\text{rBa}} m_u c}.$$

Pre dané hodnoty $v_{\text{Ba}} \approx 1,55 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 1 bod

Z výsledku vidno, že relativistický efekt netreba uvažovať, lebo $v_{\text{Ba}} \ll c$.

$$\frac{E_{\text{kBa}}}{E_\gamma} = \frac{E_\gamma}{2m_{\text{Ba}} c^2} = \frac{E_\gamma}{2A_{\text{rBa}} m_u c^2} \approx 2,6 \times 10^{-6}. \quad 1 \text{ bod}$$

e) Počet jadier ${}^{137}\text{Cs}$ vo vzorke za čas t premeny je

$$N = N_0 e^{-(\ln 2 / \tau_{\text{Cs}}) t}, \text{ kde } N_0 \text{ je začiatkový počet jadier.}$$

Aktivita vzorky (počet premien jadier Cs za jednotku času)

$$A = -\frac{dN}{dt} = N_0 (\ln 2 / \tau_{\text{Cs}}) e^{-(\ln 2 / \tau_{\text{Cs}}) t} = (\ln 2 / \tau_{\text{Cs}}) N,$$

$$\text{kde } N = \frac{M_1}{m_{\text{Cs}}} = \frac{M_1}{A_{\text{rCs}} m_u}.$$

Keďže $\tau_{\text{Ba}} \ll \tau_{\text{Cs}}$, počet fotónov A_γ vyžiarených za jednotku času je prakticky rovný počtu excitovaných jadier ${}^{137}\text{Ba}^*$ vznikajúcich za jednotku času, tzn. $A_\gamma = p A$, kde $p = 94,6 \%$ je relatívny počet excitovaných jadier bária.

Hmotnosť izotopu Cs v danej vzorke (1 km² povrchu zeme)

$$M_1 = A_{rCs} m_u N = A_{rCs} m_u \frac{A}{\ln 2} \tau_{Cs} = A_{rCs} m_u \frac{A_\gamma}{p \ln 2} \tau_{Cs}.$$

Pre dané hodnoty $M_1 \approx 1,28 \text{ mg/km}^2$.

2 body

f) Výkon emitovaného γ -žiarenia

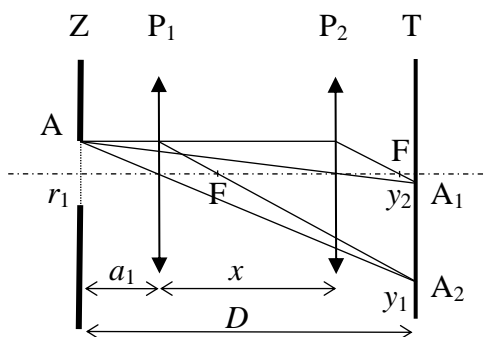
$$P = A_\gamma E_\gamma = \frac{p \ln 2}{\tau_{Cs}} \frac{M_2}{A_{rCs} m_u} E_\gamma, \text{ pre dané hodnoty } P = 320 \text{ mW}.$$

2 body

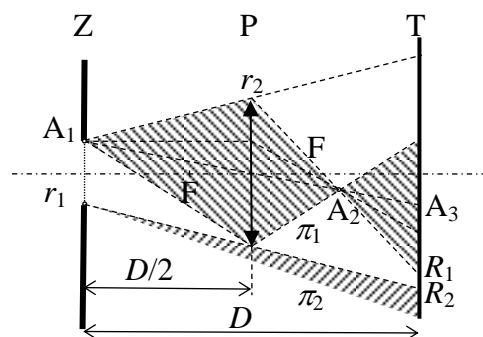
4. Ohnisková vzdialenosť šošovky LM

a) Obrázok RA3–3 (vyznačené polohy šošovky a obrazy okraja otvoru A₁ a A₂)

1 bod



Obr. RA3–3



Obr. RA3–4

b) Zobrazenie otvoru znázorníme pomocou obrazu okrajového bodu A. Pre jednotlivé vzdialenosti platí zobrazovacia rovnica

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{D-a} = \frac{1}{f}, \text{ po úprave máme rovnicu } a^2 - Da + Df = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

ktorá má dve riešenia

$$a_{1,2} = \frac{D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - Df}. \quad (1)$$

Z výsledku vidno, že polohy P₁ a P₂ sú v rovnakých vzdialenostiach od stredu sústavy.

Pre reálne riešenie musí byť splnená podmienka $f < \frac{D}{4}$.

1 bod

V tom prípade vzdialenosť dvoch polôh zaostrenia

$$x = a_2 - a_1 = 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - Df},$$

odkiaľ dostaneme ohniskovú vzdialenosť

$$f = \frac{D^2 - x^2}{4D}, \text{ pre dané hodnoty veličín } f = 80 \text{ mm}.$$

2 body

- c) Bod A otvoru v doske vzdialený o r_1 od optickej osi sa zobrazí na tienidle T vo vzdialenosti y_1 alebo y_2 podľa polohy šošovky.

Pre priečne zväčšenie máme

$$z_1 = \frac{y_1}{r_1} = \frac{D - a_1}{a_1} \quad \text{a} \quad z_2 = \frac{y_2}{r_1} = \frac{D - a_2}{a_2}.$$

Pomer priemerov obrazov

$$p = \frac{y_1}{y_2} = \frac{a_2}{a_1} \frac{D - a_1}{D - a_2} = \left(\frac{D - a_1}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{D + x}{D - x} \right)^2,$$

pre dané hodnoty veličín $p = 16$.

2 body

- d) Situáciu znázorňuje obrázok RA3–4.

1 bod

Lúče dopadajúce na šošovku dopadajú na tienidlo na kruhovú plochu s polomerom R_1 . Lúče idúce mimo šošovky priamo osvetľujú tienidlo mimo kruhovej plochy s polomerom R_2 . Medzikružie s polomerami R_1 a R_2 zostáva tmavé. Situácia v obrázku je znázornená šrafovanými plochami (osvetlená časť).

Pri pozícii šošovky uprostred je obraz A_2 okraja otvoru A_1 medzi šošovkou a tienidlom.

Priemer $2r_2$ sa na tienidle zobrazí dĺžkou $2r_3$, pričom stred A_3 tohto obrazu je vo vzdialenosti $r_{A_3} = r_1$ od optickej osi.

Ak označíme b_2 vzdialenosť obrazu A_2 od šošovky, platí

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{D/2 - b_2}{b_2}, \text{ kde pre } b_2 \text{ platí zobrazovacia rovnica}$$

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{D/2} = \frac{1}{f}, \text{ resp. } b_2 = \frac{f D}{D - 2f} = \frac{D^2 - x^2}{D^2 + x^2} \frac{D}{2}.$$

Vnútorňý polomer neosvetleného medzikružia

$$R_1 = r_1 + r_3 = r_1 + \frac{2x^2}{D^2 - x^2} r_2$$

a vonkajší polomer medzikružia

$$R_2 = r_1 + 2(r_2 - r_1) = 2r_2 - r_1.$$

Pre dané hodnoty veličín $R_1 \approx 30$ mm, $R_2 \approx 48$ mm.

2 body

55. ročník Fyzikálnej olympiády – Teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A

Autori úloh: Ivo Čáp (1 a 3), Lubomír Konrád (2), Lubomír Mucha (4)

Recenzia: Daniel Klivanec, Lubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014