55. ročník Fyzikálnej olympiády

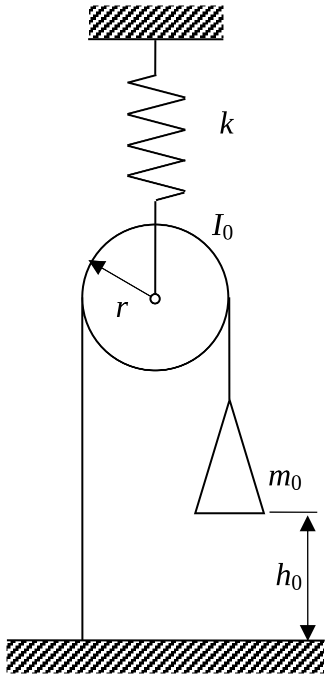
v školskom roku 2013/2014

Text teoretických úloh celoštátneho kola kategórie A

Prešov, 11. apríla 2014

1. Pružinová váha

Na obr. A3−1 je znázornená pružinová váha, ktorá pozostáva z pružiny s tuhosťou k, kladky s hmotnosťou M polomerom obvodu r a momentom zotrvačnosti vzhľadom na svoju os I_0 a misky s hmotnosťou m_0. Miska je pripevnená k vláknu, ktoré sa vedie po obvode kladky a je na druhej strane upevnené k podložke. Ak je miska prázdna, nachádza sa jej dolný okraj vo výške h_0 nad podložkou.



Obr. A3−1

a) Na misku vo výške h_0 položíme teleso s hmotnosťou m, čím uvedieme sústavu váhy do pohybu. Určte minimálnu výšku h_m dna misky, ktorú dosiahne počas tohto pohybu. (4b)

b) Po vložení telesa sa bude miska pohybovať v zvislom smere. Napíšte pohybové rovnice sústavy, dokážte, že miska vykonáva harmonické kmity, a určte amplitúdu A a frekvenciu f týchto kmitov. (6b)

Predpokladajte, že straty mechanickej energie v sústave počas pohybu sú veľmi malé a kmity sú preto netlmené. Hmotnosť pružiny neuvažujte.

Úlohu riešte všeobecne a potom pre hodnoty:

m = 500 g, k = 1,30 kN·m^{-1}, r = 100 mm, M = 2,00 kg,
I_0 = 0,0100 kg·m^2, m_0 = 500 g, h_0 = 150 mm, g = 9,81 m·s^{-2}.

Pozn.: Deformačná energia pružiny $E_p = (1/2)\, k\, (l - l_0)^2$, kde l je dĺžka deformovanej a l_0 nedeformovanej pružiny.

2. Opozícia Marsu

Pri sledovaní pohybu telies slnečnej sústavy sú definované niektoré významné polohy vzhľadom na Zem. *Konjunkciou* sa nazýva poloha, v ktorej telesá sa nachádzajú spolu so Zemou na jednej priamke, pričom pozorované telesá sú na jednej strane voči Zemi. Pri *opozícii* sú telesá spolu so Zemou na jednej priamke ale na opačných stranách voči Zemi. Pre astronomické pozorovania sú veľmi výhodné opozície planét a Slnka. V tejto úlohe sa budete zaoberať opozíciou Marsu a Slnka voči Zemi.

Doba obehu Zeme okolo Slnka T_Z = 365 dní a doba obehu Marsu okolo Slnka $T_M = k\, T_Z$, kde k = 1,88. Pre zjednodušenie najskôr predpokladajte, že obidve planéty sa pohybujú okolo Slnka v jednej rovine po kružnicových trajektóriách a v rovnakom zmysle, pričom polomer trajektórie Zeme okolo Slnka je $R_Z = 1{,}50\times10^{11}$ m.

a) Nakreslite obrázok a znázornite v ňom opozíciu Marsu a Slnka. Uveďte, prečo je opozícia so Slnkom vhodná pre astronomické pozorovania Marsu. (1b)

b) S použitím 3. Keplerovho zákona určte polomer R_M uvažovanej kružnicovej trajektórie Marsu a čas τ medzi dvomi po sebe nasledujúcimi opozíciami Marsu. Koľko celých obehov okolo Slnka vykonajú planéty medzi dvomi po sebe nasledujúcimi opozíciami? (3b)

c) Pri opozícii sa Mars, Zem a Slnko nachádzajú na jednej priamke. O aký uhol φ sa táto priamka natočí za čas τ medzi dvomi po sebe nasledujúcimi opozíciami. (1b)

V ďalších častiach úlohy uvažujte kružnicovú trajektóriu Zeme, ale trajektóriu Marsu eliptickú v súlade s 1. Keplerovým zákonom. V dôsledku toho nie sú časové intervaly τ medzi dvomi po sebe nasledujúcimi opozíciami rovnaké a menia sa v rozsahu hodnôt τ_{min} = 763 dní a τ_{max} = 811 dní. Predpokladajte, že relatívna excentricita trajektórie Marsu je malá, $\varepsilon \ll 1$ (približne 0,1).

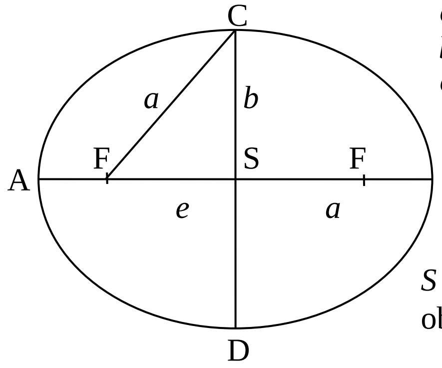
d) Nakreslite obrázok, v ktorom vyznačte v ňom Slnko, eliptickú trajektóriu Marsu, kružnicovú trajektóriu Zeme a veličiny potrebné pre ďalší výpočet. (1b)

Plošná rýchlosť $\sigma = \mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ sprievodiča Slnko–Mars je konštantná v súlade s 2. Keplerovým zákonom, uhlová rýchlosť $\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ sprievodiča Slnko–Mars sa však počas obehu okolo Slnka mení. $\mathrm{d}\alpha$ je malé natočenie sprievodiča za čas $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}S$ je obsah výseku elipsy zodpovedajúceho uhlu $\mathrm{d}\alpha$.

e) Vyjadrite plošnú rýchlosť σ, maximálnu ω_{max} a minimálnu ω_{min} hodnotu uhlovej rýchlosti Marsu, pomocou maximálnej R_{max} a minimálnej R_{min} vzdialenosti Marsu od Slnka a zadaných veličín. (2b)

f) Na základe predchádzajúcich výsledkov a daných hodnôt veličín určte približné hodnoty R_{min} a R_{max} vzdialenosti Marsu od Slnka. (2b)

Na obr. A3–2 je znázornená eliptická trajektória planéty, jej charakteristické parametre: a–hlavná polos, b–vedľajšia polos, e–excentricita, ε–relatívna excentricita, a vzťah pre výpočet plošného obsahu elipsy.



a = AS = FC
b = CS
e = FS = $a\,\varepsilon$

$S = \pi\, a\, b$
obsah elipsy

Obr. A3–2

3. *Rádioaktívne cézium Cs 137*

Izotop ${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ je jedným z významných zdrojov γ–žiarenia. Izotop ${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ je nestabilný a β–premenou sa mení na bárium ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}$. Polčas tejto premeny je $\tau_{\mathrm{Cs}} = 30{,}2$ roka. Existujú dve významné modifikácie premeny – pri prvej (5,4 % jadier) sú emitované β–elektróny s kinetickou energiou $E_1 = 1\,174$ keV a konečný produkt je ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}$ v základnom stave, pri druhej (94,6 % jadier) sú emitované β–elektróny s kinetickou energiou $E_2 = 512$ keV, pričom výsledným produktom je ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}^*$ v excitovanom stave. Excitované jadro ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}^*$ po emisii γ–fotónu sa mení na stabilné jadro.

a) Napíšte rovnice všetkých troch jadrových premien. (1b)

b) Určte veľkosti rýchlosti v_1 a v_2 emitovaných β–elektrónov. (2b)

Relaxácia ${}^{137}_{56}\mathrm{Ba}^*$ do základného stavu je sprevádzaná emisiou γ–fotónu s polčasom premeny $\tau_{\mathrm{Ba}} = 2{,}55$ min. Kinetickú energiu jadra bária získanú pri β alebo γ premene považujte za veľmi malú v porovnaní s kinetickou energiou emitovaného β–elektrónu alebo energiou γ–fotónu.

c) Určte energiu a vlnovú dĺžku emitovaného fotónu γ. (1b)

d) Určte rýchlosť jadra ${}^{137}\mathrm{Ba}$ po emisii γ–fotónu, ak predpokladáme, že jadro ${}^{137}\mathrm{Ba}^*$ bolo na začiatku v pokoji. Ukážte, že kinetická energia E_{kBa} jadra ${}^{137}\mathrm{Ba}$ je veľmi malá v porovnaní s energiou emitovaného fotónu a netreba ju v časti c) uvažovať. (2b)

Krátko po havárii v Černobyle namerali pomocou detektora γ–žiarenia v Nemecku na 1 m^2 povrchu zeme aktivitu až $A_\gamma = 4\,000$ Bq. Predpokladajte, že táto aktivita je spôsobená iba relaxáciou jadier ${}^{137}\mathrm{Ba}^*$ vznikajúcich β–premenou jadier ${}^{137}\mathrm{Cs}$.

e) Určte hmotnosť M_1 izotopu cézia ${}^{137}\mathrm{Cs}$ pripadajúceho na 1 km^2 povrchu zeme v Nemecku po havárii. (2b)

f) Určte výkon γ–žiarenia emitovaného izotopom ${}^{137}\mathrm{Cs}$ s hmotnosťou $M_2 = 1{,}0$ g. (2b)

Rýchlosť svetla vo vákuu $c = 3{,}00\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, hmotnosť elektrónu $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg, atómová hmotnostná konštanta $m_u = 1{,}66\times10^{-27}$ kg, Planckova konštanta $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s, relatívna atómová hmotnosť bária $A_{\mathrm{rBa}} = 137$, relatívna atómová hmotnosť izotopu cézia $A_{\mathrm{rCs}} = 137$.

Pozn. 1: 1 Bq predstavuje jednu premenu za 1 s. 1 eV = 1,602×10^{-19} J

Pozn. 2: Izotop ${}^{137}_{55}\mathrm{Cs}$ *je jedným z produktov jadrového štiepenia uránu* ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. *Vyskytuje sa v jadrovom odpade z reaktorov alebo produktov pri výbuchu jadrových zbraní. Vyskytuje sa napr. v znečistení spôsobenom haváriami v Černobyle alebo vo Fukušime. Používa sa aj na kalibráciu detektorov radiácie.*

4. Ohnisková vzdialenosť šošovky

Dve rovnobežné tenké dosky sa nachádzajú vo vzájomnej vzdialenosti D = 500 mm. V jednej doske je kruhový otvor s polomerom r_1 = 2,0 mm, ktorým preniká svetlo do celého priestoru za doskou a dopadá na druhú dosku. Medzi doskami sa nachádza spojná šošovka s polomerom kružnicového obvodu r_2 = 25 mm, ktorej optická os je kolmá na dosky a prechádza stredom otvoru. Pri posúvaní šošovky pozdĺž jej optickej osi medzi doskami vznikne ostrý obraz otvoru v dvoch polohách šošovky, ktorých vzájomná vzdialenosť x = 300 mm.

a) Situáciu znázornite pomocou vhodného obrázku. (1b)
b) Určte ohniskovú vzdialenosť f šošovky. Akú podmienku musia spĺňať hodnoty veličín D a f, aby existovali dve polohy šošovky pre vznik ostrého obrazu? (4b)
c) Určte pomer p priemerov obrazov otvoru na druhej doske. (2b)
d) Určte vnútorný R_1 a vonkajší R_2 polomer tmavého medzikružia na druhej doske, ak sa šošovka nachádza uprostred medzi doskami. Situáciu znázornite na obrázku. (3b)

Predpokladajte, že ide o tenkú šošovku.

55. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Teoretické úlohy celoštátneho kola kategórie A***

Autori úloh: Ivo Čáp (1 a 3), Ľubomír Konrád (2), Ľubomír Mucha (4)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014