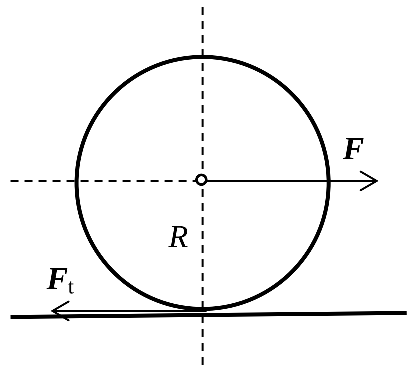
55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014
Riešenie úloh domáceho kola kategórie A
(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. Kyvadlo vo valci

Riešenie:

a) Ide o sústavu dvoch spojených telies – kyvadlo tvorené telieskom na tenkej tyčke a obruč, k osi ktorej je pripevnené kyvadlo. V zvislom smere ide iba o pohyb kyvadla (obruč sa v zvislom smere nepohybuje), vo vodorovnom smere sa pohyb kyvadla prenáša prostredníctvom upevnenia k osi obruče na obruč. Na obruč pôsobí navyše sila statického trenia s podložkou, ktorá bráni šmýkaniu obruče (obruč sa pohybuje iba valivým pohybom). Keby medzi obručou a podložkou nepôsobila sila trenia a obruč sa kĺzala po podložke bez rotácie, opisoval by vodorovný pohyb sústavy zákon zachovania hybnosti. Vonkajšia sila trenia, ktorá pôsobí na obruč, ale nedovoľuje tento zákon jednoducho použiť.

Istú možnosť predstavuje náhrada valivého pohybu ekvivalentným posuvným pohybom bez rotácie. Ak na os obruče pôsobí kyvadlo silou s vodorovnou zložkou $\boldsymbol{F}$, vzniká na podložke opačne orientovaná sila statického trenia $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$. Postupný pohyb určuje výsledná sila



$$M a = F - F_\mathrm{t},$$

rotačný pohyb okolo osi obruče moment trecej sily

$$I \varepsilon = F_\mathrm{t} R,$$

kde $I = M R^2$ je moment zotrvačnosti vzhľadom na rotačnú os obruče. Keďže ide o valivý pohyb, platí $a = R\,\varepsilon$. Z obidvoch rovníc dostaneme po úprave

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right) a = F \text{, kde pre prípad obruč } M + I/R^2 = 2\,M.$$

Z hľadiska posuvného pohybu možno nahradiť valivý pohyb s rotáciou daného telesa postupným pohybom telesa s hmotnosťou $M^* = M + I/R^2$ bez rotácie, tzn. ako keby sila F_t nepôsobila. Ak silu F_t eliminujeme ekvivalentnou hmotnosťou, môžeme použiť ZZH, ktorý platí v inerciálnej vzťažnej sústave spojenej s podložkou.

Teliesko sa pohybuje v neinerciálnej sústave spojenej s osou obruče po kružnici s polomerom R (v smere dotyčnice) rýchlosťou v_k. Os obruče sa pohybuje vo vodorovnom smere rýchlosťou u. V inerciálnej sústave spojenej s podložkou je rýchlosť telieska

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\mathrm{k} + \boldsymbol{u}, \text{ resp. } \quad v_x = v_\mathrm{k} \cos\varphi + u \quad \text{a} \quad v_y = -\, v_\mathrm{k} \sin\varphi. \qquad (1)$$

Pozn.: Rýchlosť $\boldsymbol{v}_\mathrm{k}$ *má smer dotyčnice ku kružnici a s vodorovným smerom x zviera uhol* φ.

Zákon zachovania vodorovnej zložky hybnosti pre nulovú začiatočnú hybnosť má tvar

$$M^* u + m\, v_x = 0\text{, resp. } v_x = -\frac{2M}{m} u\,. \qquad (2)$$

Keďže v sústave nepôsobia žiadne sily šmykového trenia, zachováva sa celková mechanická energia sústavy. Ak uvažujeme začiatočnú hodnotu mechanickej energie sústavy nulovú, nadobudnutá kinetická energia sústavy obruč + teliesko je rovná zmene potenciálnej energie telieska

$$\frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = m g R (1 + \cos\varphi). \qquad (3)$$

Vzťah pre kinetickú energiu obruče môžeme zjednodušiť použitím výrazu $u = R\omega$

$$E_{\mathrm{k\,obruč}} = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{u}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} M^* u^2 = M u^2.$$

Kvadrát veľkosti rýchlosti telieska vyjadríme pomocou u s požitím (2)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{2 M u}{m}\right)^2 + (v_{\mathrm{k}} \sin\varphi)^2. \qquad (4)$$

Z vyjadrenia vodorovnej zložky rýchlosti a vzťahu (2) určíme kruhovú rýchlosť

$$v_x = v_{\mathrm{k}} \cos\varphi + u = -\frac{2M}{m} u, \text{ odkiaľ } v_{\mathrm{k}} = -\frac{2M + m}{m \cos\varphi} u. \qquad (5)$$

S použitím predchádzajúcich výrazov upravíme rovnicu (3) na tvar

$$\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\left[\frac{2M}{m} + \left(1 + \frac{2M}{m}\right)\mathrm{tg}^2\varphi\right] u^2 = 2 g R (1 + \cos\varphi),$$

odkiaľ vyjadríme rýchlosť pohybu ťažiska obruče

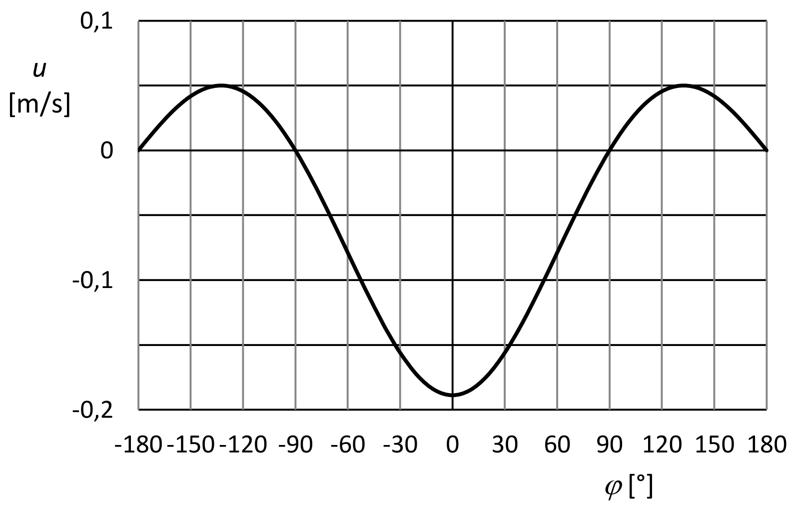
$$u = \pm\sqrt{\frac{2 g R (1 + \cos\varphi)}{\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\left[\frac{2M}{m} + \left(1 + \frac{2M}{m}\right)\mathrm{tg}^2\varphi\right]}} \quad .$$

Znamienko je opačné než znamienko v_x, tzn. (+) pre $\varphi \in$ (–180°, –90°) a (90°, 180°) a (–) pre $\varphi \in$ (–90°, 90°).

Pozn.: Odvodený vzťah môže mať aj iný tvar podľa úprav pri jeho odvodení, výsledný graf však musí byť rovnaký.

3 body

Graf závislosti pre dané hodnoty:



Obr. RA–1 **1 bod**

Uhlová rýchlosť obruče $\omega = u/R$.
Minimálna hodnota veľkosti uhlovej rýchlosti $\omega_{min} = 0$ a tento stav nastane pri uhloch $\varphi = \pm 180°$ (začiatočný a konečný stav), 90° a –90° (prechod vodorovnou polohou tyčky).

Maximálnu hodnotu nadobudne veľkosť uhlovej rýchlosti pri prechode telieska najnižšou polohou $\varphi = 0°$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\frac{4}{\left(1+\frac{2M}{m}\right)\frac{2M}{m}}}$$, pre dané hodnoty $\omega_{max} \approx 1{,}9\ \mathrm{s}^{-1}$. **1 bod**

b) Kvadrát veľkosti rýchlosti telieska určíme pomocou vzťahov (4) a (5)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2M}{m}u\right)^2 + \left(\frac{2M+m}{m\cos\varphi}u\right)^2 \sin^2\varphi} =$$

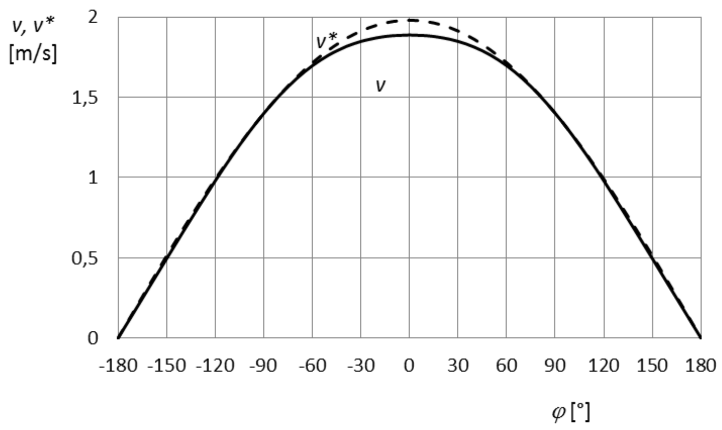
$$= u\sqrt{\left(\frac{2M}{m}\right)^2 + \left(\frac{2M}{m}+1\right)^2 \mathrm{tg}^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{2M}{m}\right)^2 + \left(\frac{2M}{m}+1\right)^2 \mathrm{tg}^2\varphi}{\frac{2M}{m}\left(1+\frac{2M}{m}\right)+\left(1+\frac{2M}{m}\right)^2 \mathrm{tg}^2\varphi}} \sqrt{2gR(1+\cos\varphi)}$$

2 body

Výsledok pre nepohyblivú obruč môžeme dosiahnuť z predchádzajúceho výsledku, ak predpokladáme $M \to \infty$. Predchádzajúci výsledok dostane tvar

$$v^* = \sqrt{2gR(1+\cos\varphi)}$$ **1 bod**



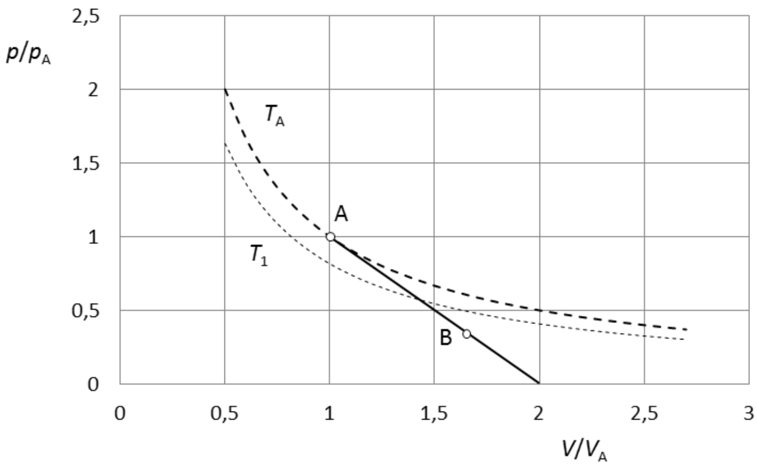
Obr. RA–2 **1 bod**

Čiarkovaná čiara zodpovedá nepohyblivej obruči a rýchlosť telieska dosahuje maximálnu hodnotu v najnižšej polohe $\varphi = 0°$.
V prípade pohyblivej obruče je rýchlosť najmä okolo dolnej polohy menšia, čo súvisí s tým, že časť energie preberá obruč. Hodnoty obidvoch rýchlostí sa zhodujú pre $\varphi = 90°$, kedy rýchlosť obruče $u = 0$. **1 bod**

2. Termodynamický dej

Riešenie:

a) Pozri obr. RA–3



Obr. RA–3 **2 body**

Čiarkovaná čiara prechádzajúca bodom A je izoterma pre teplotu T_A plynu. Čiara nižšie je izoterma pre teplotu T_1 plynu, $T_B < T_1 < T_A$. Čiara AB daného procesu nemôže prechádzať oblasťou nad izotermou T_A, lebo by to znamenalo zvýšenie teploty. Podmienku minimálnej hodnoty $|k|$ predstavuje teda dotyčnica k izoterme T_A v jej bode A. Rovnica stavovej priamky je

$$p = p_A + k\left(V - V_A\right), \qquad (1)$$

kde smernica k je daná deriváciou rovnice izotermy $p = \frac{nRT_A}{V}$ podľa V

$$k = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{T_A} = -\frac{nRT_A}{V_A^2} = -\frac{p_A}{V_A}.$$

Keďže stavová priamka postupne pretína stále nižšie izotermy, teplota stále klesá.

Plyn teplo neodovzdáva do okolia, teda $\delta Q \geq 0$ (δQ je teplo dodané plynu). Zmena vnútornej energie plynu na elementárnom úseku stavovej priamky

$\mathrm{d}U = \delta Q - \delta W = \delta Q - p\,\mathrm{d}V$, kde δW je práca plynu a $\mathrm{d}U = C_V\,\mathrm{d}T$ je zmena jeho vnútornej energie.

Odtiaľ dostaneme

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V.$$

Zmenu $\mathrm{d}T$ teploty určíme zo stavovej rovnice $p\,V = n\,R\,T$, odkiaľ dostaneme diferencovaním

$$nR\,\mathrm{d}T = \mathrm{d}\left(p\,V\right) = V\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V,$$

kde R je molová plynová konštanta.

Vzťah pre teplo je po dosadení

$$\delta Q = \frac{C_V}{nR}\left(V\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V\right) + p\,\mathrm{d}V = \frac{C_V}{nR}\left[V\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V\left(1 + \frac{nR}{C_V}\right)\right] = \frac{C_V}{nR}\left[V\,\mathrm{d}p + \kappa\,p\,\mathrm{d}V\right] \geq 0,$$

kde κ je Poissonova konštanta.

Túto podmienku pre δQ môžeme napísať

$$V\,\mathrm{d}p \geq -\kappa\,p\,\mathrm{d}V, \text{ resp. } \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \geq -\kappa\frac{p}{V}.$$

Ak za tlak dosadíme z rovnice (1), dostaneme

$$k \geq -\kappa\,\frac{p_A + k\left(V - V_A\right)}{V}\text{, resp. } \quad -\frac{p_A}{V_A} \geq -2\,\kappa\,\frac{p_A}{V} + \kappa\,\frac{p_A}{V_A}\,,$$

odkiaľ

$$\frac{V}{V_A} \leq \frac{2\,\kappa}{\kappa + 1}\,. \qquad (2)$$

Práca plynu v grafe na obr. RA–3 zodpovedá obsahu plochy medzi úsečkou AB a osou objemu. Maximálna hodnota práce W_{AB} zodpovedá maximálnej dĺžke úsečky AB, a teda stav B zodpovedá medznej hodnote objemu podľa podmienky (2)

$$V_B = \frac{2\,\kappa}{\kappa + 1}V_A\,.$$

zdôvodnenie – časť a) **4 body**

b) Teplotu T_B určíme zo stavovej rovnice

$$T_B = \frac{p_B V_B}{n R} = \frac{p_A + k\left(V_B - V_A\right)}{n R}V_B = T_A\left(2 - \frac{V_B}{V_A}\right)\frac{V_B}{V_A} = T_A\,\frac{4\,\kappa}{\left(\kappa + 1\right)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty T_B = 480 K = 207 °C. **2 body**

Pozn.: Pre CO_2 je $\kappa = 4/3$

c) Práca plynu

$$W_{AB} = \frac{1}{2}\left(p_A + p_B\right)\left(V_B - V_A\right) = \frac{1}{2}n\,R\,T_A\,\frac{\left(\kappa + 3\right)\left(\kappa - 1\right)}{\left(\kappa + 1\right)^2}\,.$$

Pre dané hodnoty W_{AB} = 540 J. **2 body**

3. *Magnetické zrkadlo*

Riešenie:

a) Častica sa pohybuje pôsobením sily magnetického poľa $\boldsymbol{F} = Q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, ktorá je kolmá na smer indukcie $\boldsymbol{B}$. Vektor rýchlosti preto možno rozložiť na zložku $v_\perp = v \sin\alpha$ kolmú na $\boldsymbol{B}$ a zložku $v_\| = v \cos\alpha$ rovnobežnú s $\boldsymbol{B}$. Pohyb v smere vektora $\boldsymbol{B}$ je rovnomerný (nulová zložka vektora sily). V kolmom priemete pôsobí dostredivá sila

$$F = Q\, v_\perp\, B = m\frac{v_\perp^2}{R},$$

kde R je polomer krivosti kolmého priemetu trajektórie častice do zvislého smeru.
Odtiaľ dostaneme polomer

$$R = m\frac{v_\perp}{Q\,B} = m\frac{v \sin\alpha}{Q\,B}.$$

V homogénnom poli ide o rovnomerný pohyb s konštantným polomerom zakrivenia. Polomer R skrutkovice predstavuje polomer valcovej plochy, vo vnútri ktorej sa častice pohybujú a ktorá sa dotýka osi sústavy. Maximálna hodnota polomeru R je pre $\alpha = \pi/2$ rad

$$R_{\max} = \frac{m\,v}{Q\,B}.$$

Častice na povrch valcovej nádoby nedopadnú, ak polomer R_N jej vnútornej steny

$$R_N > 2R_{\max} = \frac{2\,m\,v}{Q\,B}.$$

Kombináciou pozdĺžneho rovnomerného pohybu a priečneho rovnomerného pohybu po kružnici je skrutkovica. Pre kladné častice je skrutkovica ľavotočivá (pri pohľade v smere pozdĺžnej zložky rýchlosti je priečny pohyb po kružnici proti smeru chodu hodinových ručičiek) **6 bodov**

b) Sila magnetického poľa na časticu s nábojom je kolmá na smer jej pohybu, a preto nemení kinetickú energiu častice. V stave podľa obrázku (b) magnetická indukcia narastá v smere pohybu častice, čo pri zjednodušenom pohľade znamená, že polomer R trajektórie častice sa zmenšuje. Častice sa po skutkovicových trajektóriách koncentrujú v smere nárastu veľkosti magnetickej indukcie.
V bode C má vektor rýchlosti všeobecne zložky: $v_\|$ – pozdĺžnu v smere osi o, $v_\perp$ – priečnu obežnú a v_r – priečnu radiálnu. Vektor magnetickej indukcie má zložku $B_\| = B \cos\beta$ – pozdĺžnu, a $-B_r = -B \sin\beta$ – priečnu radiálnu smerom k osi.

Zložky magnetickej sily sú:
- pozdĺžna v smere osi $F_\| = -\, v_\perp B_r = -\, v_\perp B \sin\beta$,
- priečna obežná $F_\perp = v_\| B_r - v_r B_\|$,
- priečna radiálna $F_r = v_\perp B_\|$.

Ako vidno, v pozdĺžnom smere pôsobí brzdiaca sila, ktorá postupne pohyb v smere osi zastaví, tzn. $v_\| \to 0$. Sila $F_\|$ postupne narastá v smere gradientu poľa a teda v pozdĺžnom smere ide o nerovnomerne spomalený pohyb. V dôsledku zachovania kinetickej energie častice má častica stálu priečnu rýchlosť $v_\perp$, tzn. sila $F_\|$ vyvolá zrýchlenie v opačnom smere – častica sa od konca nádoby pružne odrazí.

Keď častica prejde nazad do homogénneho poľa, prejde na pohyb pozdĺž pôvodnej skrutkovice a pôvodným polomerom krivosti.

Keďže pri odraze častica prechádza na pôvodnú trajektóriu, mení sa smer radiálnej zložky rýchlosti, tzn. v bode obratu je $v_r = 0$. Podľa zákona zachovania energie má častica v bode obratu pôvodnú rýchlosť v_0, ale smer tejto rýchlosti je priečny obežný $v_\perp = v_0$.

Z výsledku vidno, že častice vstupujúce so nádoby v smere osi ($\alpha = 0$) a pohybujú v homogénnom magnetickom poli priamočiaro a vzhľadom na $v_\perp = 0$ nepodliehajú brzdiacej sile $F_{||}$. Podobne pre častice s uhlom rozptylu $\alpha < \alpha_{krit}$, kde α_{krit} je medzný uhol zrkadla, je brzdiaca sila tak malá, že na príslušnej dráhe zrkadlo častice nezastaví a častice opustia nádobu. Určenie α_{krit} je zložité a presahuje rámec tejto úlohy.

4 body

4. *Rádioizotopový termoelektrický generátor*

Riešenie:

a) Rovnica premien

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{238}_{93}\mathrm{Np} + 2\,^{1}_{0}\mathrm{n}$$

$$^{238}_{93}\mathrm{Np} \rightarrow ^{238}_{94}\mathrm{Pu} + ^{0}_{-1}\mathrm{e}\,.$$

Druhá reakcia je premena β, pri ktorej dochádza k emisii elektrónov. **1 bod**

b) Rovnica premeny plutónia $^{238}\mathrm{Pu}$ je

$$^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow ^{234}_{92}\mathrm{U} + ^{4}_{2}\mathrm{He}\,. \qquad (1)$$

Ide o premenu α, pričom žiarenie α sa na veľmi krátkej vzdialenosti rádovo desatín mm tlmí a nepreniká do okolitých zariadení. **1 bod**

Energia uvoľnená pri reakcii je daná úbytkom pokojovej hmotnosti sústavy

$$E = \Delta m\, c^2 = \left[m_r\left(^{238}\mathrm{Pu}\right) - m_r\left(^{234}\mathrm{U}\right) - m_r\left(^{4}\mathrm{He}\right)\right] u\, c^2,$$

kde $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je rýchlosť svetla vo vákuu a $m_u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg atómová hmotnostná konštanta.

Pre dané hodnoty

$$E \approx 8{,}98 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 5{,}61\ \mathrm{MeV}.$$ **2 body**

c) Pri premene (1) jadra plutónia sú splnené zákony zachovania energie a hybnosti. Keďže celková kinetická energia E je oveľa menšia ako pokojové hmotnosti produktov, najmä $E << A_r(\mathrm{He})\, m_u\, c^2 = 3{,}73$ GeV, môžeme nahradiť hmotnosť pri mechanických výpočtoch pokojovými hmotnosťami. Predpokladajme, že rýchlosti produktov sú oveľa menšie ako rýchlosť šírenia svetla vo vákuu, a preto použijeme klasický vzťah pre kinetickú energiu

$$0 = m_\mathrm{U}\, v_\mathrm{U} + m_\mathrm{He}\, v_\mathrm{He}\,,$$

$$E = \frac{1}{2} m_\mathrm{U}\, v_\mathrm{U}^2 + \frac{1}{2} m_\mathrm{He}\, v_\mathrm{He}^2\,.$$

Z toho dostaneme rýchlosti

$$v_{He} = \sqrt{\frac{2E}{m_{He}} \frac{m_U}{m_U + m_{He}}} \quad , \quad v_U = \sqrt{\frac{2E}{m_U} \frac{m_{He}}{m_U + m_{He}}} \quad ,$$

pre dané hodnoty

$v_{He} \approx 1{,}63 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_U = 2{,}79 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

Hodnoty rýchlosti sú o jeden až dva rády menšie ako *c*, preto je použitie klasického vzťahu oprávnené.

Hodnoty kinetickej energie produktov sú

$$E_{He} = \frac{1}{2} m_{He}\, v_{He}^2 = E \frac{m_U}{m_U + m_{He}} \,, \quad E_U = \frac{1}{2} m_U\, v_U^2 = E \frac{m_{He}}{m_U + m_{He}} \,,$$

pre dané hodnoty

$E_{He} \approx 8{,}83 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \approx 5{,}52\ \mathrm{MeV}$, $E_U \approx 1{,}51 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} \approx 94{,}4\ \mathrm{keV}$. **2 body**

d) Náplň generátora s hmotnosťou *m* obsahuje počet atómov plutónia

$$N_0 = \frac{m}{m_{PuO2}} = \frac{m}{M_{PuO2}} N_A \,,$$

kde m_{PuO2} je atómová hmotnosť a $M_{PuO2} = 270 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-3}}$ mólová hmotnosť oxidu plutónia.

Aktivita *A* náplne je

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\ln 2}{T} N_0\, \mathrm{e}^{-\ln 2 \frac{t}{T}} \,.$$

Na začiatku je elektrický výkon generátora

$$P_0 = \eta\, A\, E = \eta\, E \frac{m}{M_{PuO2}} N_A \frac{\ln 2}{T} \,,$$

kde N_A je Avogadrova konštanta. Pre dané hodnoty $P \approx 251$ W.

Po uplynutí času *t* poklesne výkon generátora na hodnotu

$$P = P_0\, \mathrm{e}^{-\ln 2 \frac{t}{T}} \,,$$

pre dané hodnoty $P \approx 169$ W. **2 body**

5. *Mostík z kondenzátorov*

Riešenie:

a) Ide o zložený elektrický obvod, v ktorom po zapnutí spínača jednotlivé kondenzátory sa budú nabíjať. Na začiatku sú napätia na kondenzátoroch nulové, preto začiatočná hodnota prúdu zdroja $I_0 = U_0/R_2$. Potom prúd postupne klesá až k nulovej hodnote v stave ustálenia, kedy sú kondenzátory plne nabité. Elektrický prúd v obvode, ako aj napätia medzi uzlami, budú funkciami času *t*. V stave ustálenia je prúd kondenzátorov a tým aj prúd rezistorov nulový a napätie medzi uzlami A a C je nulové. Keďže v ustálenom stave

$U_{AB} = U_{AC}$ a $U_{BD} = U_{CD}$, sú náboje kondenzátorov $Q_1 = Q_4 \neq Q_2 = Q_3$. Rezistorom R_1 preto musí prejsť rozdielový náboj $\Delta Q = Q_1 - Q_2$, čo je spojené s uvoľnením tepla. Náboj $Q_1 + Q_2$ prejde rezistorom R_2 a tiež vyvolá uvoľnenie tepla.

V priebehu deja dodá zdroj náboj $Q = Q_1 + Q_2$ a vykoná prácu $W = Q\,U_0$. Táto práca je rovná energii akumulovanej v nabitých kondenzátoroch a teplu uvoľnenému v rezistoroch.

2 body

Prúd zdroja klesá z maximálnej hodnoty k nulovej hodnote. Presné riešenie vyžaduje riešenie diferenciálnej rovnice. Podľa jednoduchého modelu môžeme predpokladať, že prúd klesá rovnomerne a teda náboj, ktorý prejde zdrojom, je $Q = I_s\,\tau$, kde $I_s = I_0/2$ je stredná hodnota prúdu. Odtiaľ dostaneme odhad času prechodného deja

$$\tau = \frac{2}{I_0}\left(C_1 + C_2\right)\frac{U_0}{2} = \left(C_1 + C_2\right)R_2 = \left(p + \frac{1}{p}\right)C_0\,R_2\,,$$

pre dané hodnoty veličín $\tau \sim 6$ μs.

2 body

b) V čase zapnutia spínača sú napätia na všetkých kondenzátoroch nulové, preto i napätie $U_{R1} = 0$ a napätie $U_{R2} = U_0$.

Po ustálení sú prúdy kondenzátorov nulové a teda napätie $U_{R1} = 0$. Rezistor R_1 možno v ustálenom stave nahradiť skratom. Kondenzátory C_1 a C_2 sú tak spojené paralelne rovnako ako C_3 a C_4. Dvojice paralelných kondenzátorov majú rovnakú kapacitu $C = C_1 + C_2$ a napätie zdroja sa preto rozdelí medzi dvojice rovnakým dielom. V ustálenom stave je preto napätie všetkých kondenzátorov rovnaké a rovné $U_0/2$. Keďže v ustálenom stave je prúd zdroja nulový, je $U_{R2} = 0$.

2 body

c) Celkový náboj dodaný zdrojom je rovný súčtu nábojov dodaných na kondenzátory vo vetvách AB a AC

$$Q_0 = \left(C_1 + C_2\right)\frac{U_0}{2}\,.$$

Cez kondenzátor C_{AB} prejde náboj $Q_2 = C_2\,U_0/2$, po ustálení je na kondenzátore C_{BD} náboj $Q_1 = C_1\,U_0/2$. Rozdiel nábojov prejde cez rezistor R

$$Q_R = \left(C_1 - C_2\right)\frac{U_0}{2}\,.$$

Pomer nábojov

$$q = \frac{Q_R}{Q_0} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}\text{, pre dané hodnoty } q = 0{,}60 = 60\%.$$ **2 body**

d) Práca vykonaná zdrojom konštantného napätia je

$$W = Q_0\,U_0 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)U_0^2\,.$$

Po ustálení je energia akumulovaná v kondenzátoroch

$$E_{\mathrm{C}} = 2\times\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)\left(\frac{U_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(C_1+C_2\right)U_0^2 .$$

Rozdiel predstavuje teplo uvoľnené v obvode

$$Q_{\mathrm{t}} = W - E_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)U_0^2 - \frac{1}{4}\left(C_1+C_2\right)U_0^2 = \frac{1}{4}\left(C_1+C_2\right)U_0^2 .$$

Hľadaný pomer

$$\eta = \frac{W}{Q_{\mathrm{t}}} = \frac{1}{2} = 50\ \%.$$ **2 body**

6. Achromát

Riešenie:

a) Ohnisková vzdialenosť f_1 zakriveného rozhrania dvoch optických prostredí s indexmi lomu n_1 a n_2 s polomerom krivosti R je daná vzťahom pre optickú mohutnosť

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = \left(n_2 - n_1\right)\frac{1}{R} .$$

Pri zaradení optických rozhraní tesne za sebou sa optické mohutnosti jednotlivých lámavých plôch sčítajú, takže optická mohutnosť spojnej šošovky je

$$D = \frac{1}{f} = \left(n-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \text{ resp. } f = \frac{1}{n-1}\,\frac{R_{10}\ R_{20}}{R_{10}+R_{20}} .$$

Pre dané hodnoty f_{C} = 67,2 mm, f_{D} = 66,4 mm, f_{F} = 64,7 mm. **3 body**

b) Tienidlo je postavené za šošovku vo vzdialenosti $x = f_{\mathrm{fD}}$. Ohnisko pre červené svetlo za rovinou tienidla a stopa červeného svetla má priemer

$$d_{\mathrm{C}} = 2\,R_{\mathrm{m}}\,\frac{f_{\mathrm{fC}} - f_{\mathrm{fD}}}{f_{\mathrm{fC}}}\text{, pre dané hodnoty } d_{\mathrm{C}} = 0{,}24\ \text{mm}.$$

Ohnisko pre modré svetlo je pred tienidlom a priemer stopy na tienidle

$$d_{\mathrm{F}} = 2\,R_{\mathrm{m}}\,\frac{f_{\mathrm{fD}} - f_{\mathrm{fF}}}{f_{\mathrm{fF}}}\text{, pre daní hodnoty } d_{\mathrm{F}} = 0{,}53\ \text{mm}.$$ **3 body**

c) V zostave achromátu sú tri rozhrania. Prvé vzduch–korunové sklo s polomerom R_1, druhé korunové sklo–flintové sklo s polomerom ($-R_2$) a tretie flintové sklo–vzduch rovinné. Optická mohutnosť sústavy

$$D = \frac{1}{f} = \left(n_{\mathrm{k}} - 1\right)\frac{1}{R_1} + \left(n_{\mathrm{f}} - n_{\mathrm{k}}\right)\left(-\frac{1}{R_2}\right).$$

Optická mohutnosť tretieho rovinného rozhrania je nulová.

Pre spektrálne čiary C a F dostaneme rovnakú ohniskovú vzdialenosť

$$\left(n_{kC}-1\right)\frac{1}{R_1}+\left(n_{fC}-n_{kC}\right)\left(-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$

$$\left(n_{kF}-1\right)\frac{1}{R_1}+\left(n_{fF}-n_{kF}\right)\left(-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}\,.$$

Ide o sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme $1/R_1$ a $1/R_2$. Z tejto sústavy dostaneme

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}{\left(n_{kF}-1\right)\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{kC}-1\right)\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{n_{kC}-n_{kF}}{\left(n_{kF}-1\right)\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{kC}-1\right)\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}\frac{1}{f}\,,$$

resp.

$$R_1=\frac{\left(n_{kF}-1\right)\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{kC}-1\right)\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}{\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}\,f$$

$$R_2=\frac{\left(n_{kF}-1\right)\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{kC}-1\right)\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}{n_{kC}-n_{kF}}\,f\,.$$

Pre určené polomery dostaneme ohniskovú vzdialenosť pre žltú spektrálnu čiaru D

$$f_D=\frac{\left(n_{kF}-1\right)\left(n_{fC}-n_{kC}\right)-\left(n_{kC}-1\right)\left(n_{fF}-n_{kF}\right)}{\left(n_{kD}-1\right)\left(n_{fC}-n_{fF}+n_{kF}-n_{kC}\right)+\left(n_{fD}-n_{kD}\right)\left(n_{kF}-n_{kC}\right)}\,f\,.$$

Pre dané hodnoty veličín R_1 = 21,3 mm, R_2 = 11,1 mm, f_D = 50,1 mm. **4 body**

Z výsledku vidno, že i medzi hraničnými vlnovými dĺžkami je disperzia objektívu výrazne kompenzovaná.

7. Vyžarovanie žiarovky – experimentálna úloha **10 bodov**

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie A*

Autori úloh: Arpád Kecskés (1), Ľubomír Mucha (2), Ivo Čáp (3 až 7)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013