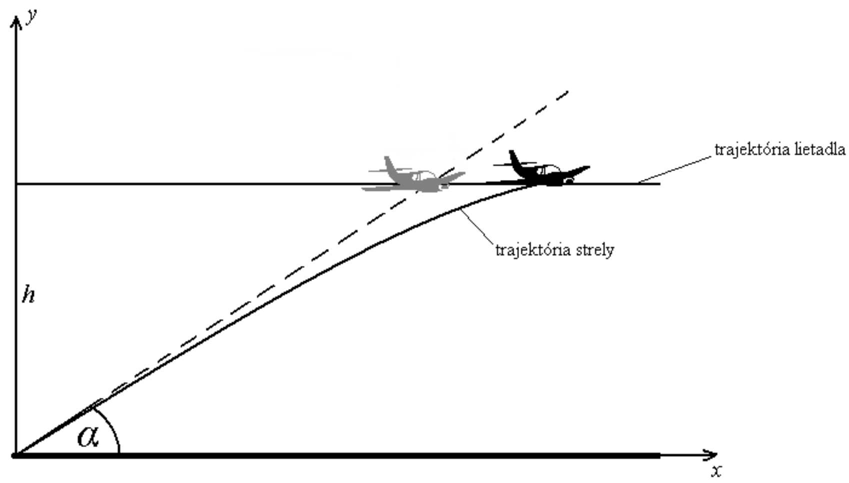
55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014
Riešenie úloh domáceho kola kategórie C
(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. *Cvičná streľba na letiacu maketu lietadla*

Riešenie:

a) Obr. RC–1 **2 body**



b) Pri streľbe na pohyblivý cieľ treba rátať s časom letu náboja, za ktorý sa cieľ posunie do novej polohy. Aby sa cieľ zasiahol, treba namieriť delo pred cieľ. **2 body**

c) K zásahu mohlo dôjsť, lebo trajektória strely je v gravitačnom poli zakrivená. Situáciu znázorňuje obr. RC-1. Ak došlo k zásahu makety, pre tento prípad vypočítame výšku *h*, v ktorej sa pohybovala nad povrchom zeme.

Trajektória strely predstavuje šikmý vrh v tiažovom poli so súradnicami

$$x = v_2\, t \cos\alpha\,, \qquad y = v_2\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2$$

v sústave (x, y) položenej do zvislej roviny trajektórie náboja i makety. Začiatok (0,0) súradnicovej sústavy (x, y) je v ústí hlavne dela, obr. RC- 1. Náboj bol vystrelený v okamihu $t = 0$ s.

Maketa mala v okamihu výstrelu polohu danú súradnicami

$$x_{\mathrm{L0}} = \frac{h}{\tan\alpha} \qquad y_{\mathrm{L0}} = h\,.$$

Vodorovnú súradnicu *x* makety ako funkciu času *t* vyjadríme

$$x_{\mathrm{L}} = \frac{h}{\tan\alpha} + v_1\, t\,.$$

V čase zásahu t_z sú súradnice makety i náboja rovnaké

$$\frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + v_1\, t_z = v_2\, t_z\, \cos\alpha\,,$$

$$h = v_2\, t_z\, \sin\alpha - \frac{1}{2}\, g\, t_z^2\,.$$

Riešením tejto sústavy rovníc vylúčením času t_z pre výšku h dostaneme vzťah

$$h = \frac{2v_1}{g}\left(v_2 \cos\alpha - v_1\right) \mathrm{tg}^2\alpha\,. \qquad (1)$$

K zásahu môže dôjsť iba v prípade $h > 0$, tzn.

$\frac{v_1}{v_2} < \cos\alpha < 1$, čo v našom prípade je splnené.

Pre dané hodnoty veličín $h \approx 4\,190$ m. **4 body**

Zásah uvedeným spôsobom je možný iba pri splnení vzťahu (1), tzn. pre dané podmienky výstrelu v_2 a α existuje iba jediná možnosť pre parametre letu h a v_1. Zásah bol v danom prípade náhodný. **2 body**

2. Hustota kvapaliny

Riešenie:

a) V prvom prípade pre plávajúcu nádobku z rovnováhy medzi tiažovou a vztlakovou silou máme

$$\left(m + \rho_o\, S\, h\right) g = \left(\rho_o\, S\, d + \rho_v\, S\, a\right) g\,, \text{ kde } a = h - d. \qquad (1)$$

V druhom prípade $\quad m\, g = \rho_o\, S\left(h - 2a\right) g\,, \qquad (2)$

kde ρ_o je hustota oleja, ρ_v hustota vody a g normálne tiažové zrýchlenie.

Z (1) a (2), ak z nich vylúčime hustotu ρ_o, odvodíme kvadratickú rovnicu pre hrúbku d olejovej vrstvy

$$d^2 - \frac{3}{2} h\, d + \frac{m}{2\rho_v S} d + \frac{h^2}{2} = 0\,,$$

ktorej riešenie je $\quad d = \frac{3}{4}h - \frac{m}{4\rho_v S} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}h - \frac{m}{4\rho_v S}\right)^2 - \frac{h^2}{2}}\,.$

Pre dané hodnoty veličín $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 7{,}2$ cm. **6 bodov**

b) Hustota oleja

$$\rho_o = \frac{m}{S\left(2d - h\right)}\,.$$

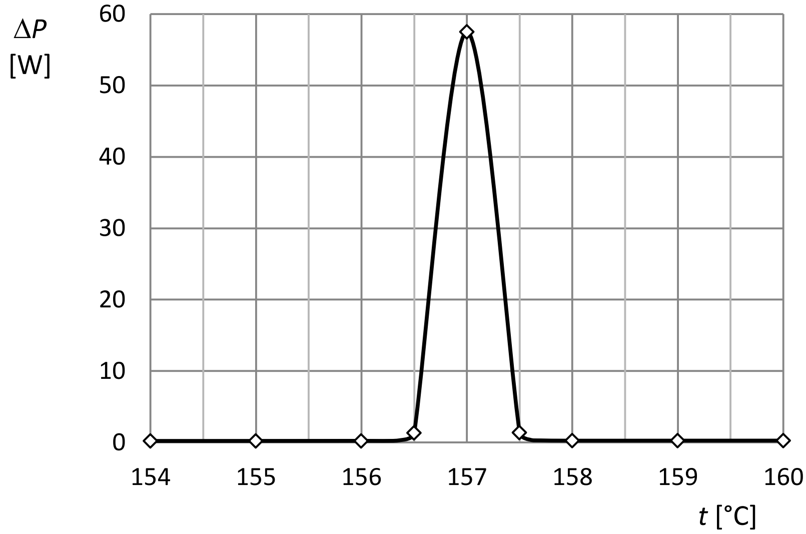
Pre dané hodnoty veličín $\rho_{o1} \approx 200\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $\rho_{o2} \approx 667\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Vzhľadom na reálne hodnoty hustoty oleja je prijateľné druhé riešenie. **4 body**

3. Diferenciálna kalorimetria

Riešenie:

a) Kúrenie zabezpečuje zohrievanie nádobiek i vzoriek. Keďže sú nádobky rovnaké a z materiálu, ktorý v teplotnom intervale merania je tepelne stabilný, diferenciálny príkon ΔP možno považovať za príkon meranej vzorky.



V grafe sú zaznamenané namerané hodnoty a odhad pravdepodobnej krivky. *Pre presnejšie vymedzenie krivky by bolo potrebné zvoliť menší teplotný krok.*

Teplotná stupnica predstavuje zároveň časovú stupnicu s krokom 1 s.

2 body

Pri konštantnom príkone dochádza iba k zohrievaniu vzorky bez zmeny skupenstva. V rozsahu teplôt 156,5 °C až 157,5 °C dochádza však k výraznému zvýšeniu príkonu, čo súvisí s fázovou premenou meranej vzorky. Vzhľadom na hrubú časovú mierku možno odhadnúť teplotu topenia sa vzorky $t_t = (157 \pm 0{,}5)$ °C. **2 body**

b) V začiatočnej fáze zohrievania (prvé 2 s) prijíma vzorka priemerný príkon $P_1 \approx 232$ mW. Za čas $\Delta\tau = 2{,}0$ s prijme teplo $Q_1 = P_1\,\Delta\tau$ a zohreje sa o teplotný rozdiel $\Delta t = 2{,}0$ °C. Hmotnostná tepelná kapacita tuhej fázy látky je potom

$c_t = \dfrac{Q_1}{m\,\Delta t} = \dfrac{P_1\,\Delta\tau}{m\,\Delta t}$, pre dané hodnoty $c_t \approx 232\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$. **2 body**

V záverečnej fáze zohrievania (posledné 2 s) je priemerný príkon $P_2 \approx 268$ mW. Zodpovedajúca hmotnostná tepelná kapacita roztopenej vzorky

$c_k = \dfrac{Q_2}{m\,\Delta t} = \dfrac{P_2\,\Delta\tau}{m\,\Delta t}$, pre dané hodnoty $c_k \approx 268\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$. **2 body**

Teplo spotrebované na zmenu skupenstva charakterizuje výkonové maximum nad úrovňou spotreby pri zohrievaní. Celkové teplo je dané integrálom výkonu, v našom prípade zodpovedá obsahu plochy medzi krivkou zvýšeného príkonu a krivkou príkonu bez zmeny skupenstva. Keďže z tabuľkových hodnôt nie je možné určiť presný tvar krivky, možno výsledok iba odhadnúť. Skupenské teplo Q_3 určíme ako obsah trojuholníka s dĺžkou základne $\Delta\tau \approx 1$ s a výškou $\Delta P \approx 57{,}2$ W, teda $Q_3 = 28{,}6$ J. Hmotnostné skupenské teplo topenia vzorky potom je

$l_{\mathrm{t}} = \dfrac{Q_3}{m}$, pre dané hodnoty $l_{\mathrm{t}} \approx 28{,}6\ \mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$. **2 body**

Pozn. 1: Vypočítané hodnoty zodpovedajú vzorke india, ktoré sa používa sa na kalibráciu teploty.

Pozn. 2: Prístroje využívajúce diferenciálnu skenovaciu kalorimetriu umožňujú veľmi jemné sledovanie časového priebehu diferenciálneho príkonu a sú dostatočne presné i pri meraní veľmi malých vzoriek.

4. *Cirkusové číslo*

Riešenie:

a) Rýchlosť dopadu prvého artistu na dosku určíme zo zákona zachovania mechanickej energie artistu v gravitačnom poli zeme

$m_1\, g\, h_0 = \dfrac{1}{2} m_1 v_0^2$, odkiaľ rýchlosť dopadu $v_0 = \sqrt{2\, g\, h_0}$. 2b

Pre dané hodnoty veličín $v_0 = 7{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

b) Pre riešenie deja, ako je uvedené v texte, je potrebné uviesť fyzikálny model a pomenovať zjednodušujúce podmienky deja. Potom bude možné uviesť aj fyzikálne zákony, pomocou ktorých možno úlohu riešiť. Prvého artistu, prvú dosku a druhého artistu od okamihu dotyku prvého artistu s doskou až po okamih odrazu druhého artistu od dosky budeme považovať za izolovanú sústavu telies. V tejto sústave telies platia zákony zachovania momentu hybnosti a energie. Ďalej predpokladáme, že opísaný dej v izolovanej sústave telies trvá len krátku dobu, počas ktorej sa zmenší rýchlosť prvého artistu na hodnotu v_{01} a rýchlosť druhého artistu nadobudne hodnotu v_2. Pritom doska počas celého deja zostáva približne v horizontálnej polohe. Dosky sú blízko vedľa seba, trajektória artistu po odraze zvislo nahor je približne zhodná s trajektóriou jeho voľného pádu na ľavý koniec susednej dosky.

c) Pre zrážku prvého artistu s prvou doskou a odraz druhého artistu zo zákona zachovania momentu hybnosti máme

$$m_1 v_0 \frac{l}{2} = m_1 v_{01} \frac{l}{2} + m_2 v_2 \frac{l}{2} + \frac{1}{12} m_0 l^2 \omega_2 \qquad (1) \qquad 2\text{b}$$

a zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m_0 l^2 \omega_2^2 . \qquad (2) \qquad 2\text{b}$$

Vo výrazoch (1) a (2) v_{01} je rýchlosť prvého artistu v okamihu odrazu druhého artistu, v_2 rýchlosť odrazu druhého artistu, $\omega_2 = v_2/(l/2)$ je uhlová rýchlosť dosky po zrážke. Z (1) po úprave máme

$$m_1 (v_0 - v_{01}) = \left(m_2 + \frac{1}{3} m_0 \right) v_2 . \qquad (3)$$

Z (2) úpravou dostaneme

$$m_1\left(v_0^2 - v_{01}^2\right) = \left(m_2 + \frac{1}{3}M\right)v_2^2 . \qquad (4)$$

Z (3) a (4) (napr. podielom výrazov (4) a (3)) máme

$$v_0 + v_{01} = v_2 . \qquad (5)$$

Riešením sústavy rovníc (3) a (5) získame hľadanú odrazovú rýchlosť druhého artistu

$$v_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_0} v_0 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_0}\sqrt{2\,g\,h_0} . \qquad (6) \qquad 2\text{b}$$

Pre dané hodnoty veličín $v_2 \approx 7{,}5\ \text{m·s}^{-1}$.

d) Druhý artista získa odrazom rýchlosť v_2 a rovnakou rýchlosťou dopadne naspäť na koniec druhej dosky. Rýchlosť tretieho artistu v okamihu odrazu určíme rovnako ako v predchádzajúcom prípade (výraz (6))

$$v_3 = \frac{2\,m_2}{m_2 + m_3 + \frac{1}{3}m_0} v_2 = \frac{2\,m_2}{m_2 + m_3 + \frac{1}{3}m_0}\,\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_0} v_0 . \qquad (7)$$

Rovnako môžeme vyjadriť odrazové rýchlosti štvrtého a piateho artistu. Odrazová rýchlosť piateho artistu je

$$v_5 = \frac{2\,m_4}{m_4 + m_5 + \frac{1}{3}m_0}\,\frac{2\,m_3}{m_3 + m_4 + \frac{1}{3}m_0}\,\frac{2\,m_2}{m_2 + m_3 + \frac{1}{3}m_0}\,\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_0} v_0 \qquad (8)$$

a dosiahnutú výška piateho artistu potom je

$$h_5 = \frac{v_5^2}{2\,g} = \left[\frac{16\,m_4 m_3 m_2 m_1}{\left(m_4 + m_5 + \frac{1}{3}m_0\right)\left(m_3 + m_4 + \frac{1}{3}m_0\right)\left(m_2 + m_3 + \frac{1}{3}m_0\right)\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{3}m_0\right)}\right]^2 h_0 .$$

Pre dané hodnoty veličín $h_5 \approx 5{,}6$ m. (9) 2b

5. Airbus A380

Riešenie:

a) Prepočítaná spotreba

$u = \dfrac{V_\text{p}}{(L/100)\,N}$. Pre dané hodnoty $u \approx 2{,}5$ litra/100 km/pasažier. 1 b

Ak uvážime osobný automobil so spotrebou 8 l/100 km pri obsadení 4 cestujúcimi, je prepočítaná spotreba $u \approx 2$ litre/100 km/osoba. Z toho vidno, že prepočítaná spotreba lietadla je porovnateľná s prepočítanom spotrebou osobného automobilu.

b) Z rovnováhy tiažovej a vztlakovej sily máme

$c_N \dfrac{1}{2} \rho_c v_c^2 S = m_0 g$, odkiaľ $c_N = \dfrac{2m_0 g}{\rho_c v_c^2 S}$. Pre dané hodnoty $c_N \approx 0{,}74$. 3 b

c) Vo výške h_m je rovnica rovnováhy

$$c_N \frac{1}{2} \rho_m v_m^2 S = m_m g \text{, odkiaľ } \Delta m = m_0 - m_m = m_0 - \frac{c_N \rho_m v_m^2 S}{2g}.$$

Pre dané hodnoty $\Delta m \approx 47{,}8$ t. 3 b

d) Na vzlietnutie musí vztlaková sila dosiahnuť tiaž lietadla

$$c_N \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 S = m_0 g \text{, odkiaľ } v_0 = \sqrt{\frac{2m_0 g}{c_N \rho_0 S}}.$$

Pre dané hodnoty $v_0 \approx 118\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 426$ km/h.

Dráha potrebná na rozbeh

$s = \dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{m_0 v_0^2}{2F}$. Pre dané hodnoty $s \approx 3{,}1$ km. 3 b

6. *Pluto a Cháron*

Riešenie:

a) Priemerná hustota $\rho_P = \dfrac{6 M_P}{\pi d_P^3}$. Pre dané hodnoty veličín $\rho_P \approx 2{,}03 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 2 b

b) Celková hmotnosť $M_P = M_K + M_L$, kde M_K je hmotnosť kremičitanov a M_L je hmotnosť ľadu. Z toho

$$\rho_P = \frac{M_P}{V_P} = \frac{\rho_K V_K}{V_P} + \frac{\rho_L V_L}{V_P} = \rho_K p_1 + \rho_L (1 - p_1),$$

kde pomerný obsah kremičitanov sme označili

$$p_1 = \frac{\rho_P - \rho_L}{\rho_K - \rho_L}.$$ 2 b

Pre dané hodnoty veličín je pomerný obsah kremičitanov $p_1 \approx 66$ % a ľadu 34 %.

c) Obidve telesá obiehajú okolo spoločného hmotného stredu. Pre polomery trajektórií Pluta r_P a Chárona r_C platí $D = r_p + r_C$.

Pre rovnováhu gravitačnej a zotrvačnej sily máme

$$G \frac{M_P M_C}{D^2} = M_P \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_P, \qquad G \frac{M_P M_C}{D^2} = M_C \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_C.$$ 2 b

Po úprave máme

$$\frac{G}{D^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left(M_C + M_P\right) = r_P + r_C = D,$$

odkiaľ

$M_{\mathrm{C}} = \dfrac{4\pi^2}{T^2}\dfrac{D^3}{G} - M_{\mathrm{P}}$. Pre dané hodnoty veličín $M_{\mathrm{C}} \approx 1{,}67 \times 10^{21}$ kg. 2 b

d) Hustota Chárona

$\rho_{\mathrm{C}} = \dfrac{6 M_{\mathrm{C}}}{\pi d_{\mathrm{C}}^3}$. Pre dané hodnoty veličín $\rho_{\mathrm{C}} \approx 1{,}79 \times 10^3$ kg·m^{-3}.

Pomerný obsah kremičitanov určíme rovnako ako u Pluta

$p_2 = \dfrac{\rho_{\mathrm{C}} - \rho_{\mathrm{L}}}{\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{L}}}$.

Pre dané hodnoty je relatívny obsah kremičitanov dostaneme hodnoty $p_2 \approx 49$ % a ľadu 51 %. 2 b

7. *Výkon zdroja napätia – experimentálna úloha*

Poznámky k riešeniu:

Správne riešenie 10 b

Pri hodnotení treba vziať do úvahy:

- správny postup
- zápis do tabuľky nameraných hodnôt (označenie veličín, uvedenie jednotiek, správne zaokrúhlenie ...)
- grafy (označnie osí symbolmi veličín a jednotkami, označená stupnica na osiach, označené body s nameranými veličinami, vynesená krivka, rozloženie krivky na ploche grafu ...)
- správne vyhodnotenie výsledkov

55. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy domáceho kola kategórie C***

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 6), Ľubomír Mucha (2, 3, 4), Ivo Čáp (5, 7)
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp (1-3), Ľubomír Mucha (4-7)
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014