55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014

Riešenia úloh domáceho kola kategórie D
(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. *Predbiehanie kamióna*

a) Pri rýchlosti v_0 a výkone P_0 je sila ťahu $F_0 = P_0/v_0$. Pri zvýšení výkonu sa ťahová sila zvýši na hodnotu $F_1 = P_1/v_0$. Rozdielová sila $F - F_0$ vyvolá zrýchlenie

$$a = \frac{F_1 - F_0}{m} = \frac{P_1 - P_0}{m v_0}\text{, predané hodnoty } a \approx 0{,}60\ \text{m·s}^{-2}.$$

Ak predpokladáme, že zrýchlenie a je počas urýchľovania približne konštantné, určíme vzdialenosť áut ako rozdiel ich posunutí počas urýchľovania

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \qquad v_1 = v_0 + a t, \qquad x_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$$

$$x_2 = d_0 + v_0 t = d_0 + v_0 \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$d_1 = x_2 - x_1 = d_0 + \frac{2v_0 v_1 - v_0^2 - v_1^2}{2a} = d_0 - \frac{(v_1 - v_0)^2}{2a}\text{, pre dané hodnoty } d_1 \approx 23{,}6\ \text{m}.$$

b) Ak situáciu opisujeme v sústave spojenej s kamiónom, musí osobné vozidlo zrýchliť nulovej rýchlosti na rýchlosť $v_1 - v_0$, pokračovať rovnomerným pohybom touto rýchlosťou a uraziť celkovú vzdialenosť $2d_0 + l$. Tento pohyb trvá čas pozostávajúci z časti zrýchlenej a rovnomernej

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} + \frac{l + d_1 + d_0}{v_1 - v_0}.$$

Vzhľadom na cestu osobné vozidlo urazí vzdialenosť

$$s = v_0 t_1 + l + 2d_0 = v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + v_0 \frac{l + d_1 + d_0}{v_1 - v_0} + l + 2d_0 =$$

$$= v_0 \frac{v_1 - v_0}{a} + \frac{v_1}{v_1 - v_0} l + \frac{v_0}{v_1 - v_0} d_1 + \frac{2v_1 - v_0}{v_1 - v_0} d_0$$

pre dané hodnoty $s \approx 772$ m.

c) Keď je osobné vozidlo vedľa kamiónu, pohybuje sa už rovnomerným pohybom rýchlosťou v_1. Na dokončenie predbiehania potrebuje uraziť v sústave spojenej s kamiónom vzdialenosť $l/2 + d_0$, čo pri relatívnej rýchlosti $v_1 - v_0$ vyžaduje čas

$$t_2 = \frac{l/2 + d_0}{v_1 - v_0}.$$

Za tento čas urazí osobné vozidlo na ceste vzdialenosť $x_2 = v_1 t_2$ a oproti idúci kamión vzdialenosť $x_2' = v_0 t_2$.

Aby sa osobné vozidlo tesne minulo s kamiónom, musí byť vzdialenosť minimálne

$$d_2 = (v_1 + v_0)\, t_2 = \frac{v_1 + v_0}{v_1 - v_0}\left(l/2 + d_0\right)$$, pre dané hodnoty $d_2 \approx 680$ m.

d) Ak začne osobné vozidlo brzdiť so zrýchlením $a_3 = -F_t/m = -f\,g$, je posunutie vzhľadom na predbiehaný kamión

$$x_3 = \frac{1}{2}\, a\, t^2 .$$

Za čas manévru t_3 musí byť toto posunutie $x_3 = -(l/2 + d_4)$. Potrebný čas je

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\,x_3}{a}} = \sqrt{\frac{l + 2\,d_4}{f\,g}} \quad .$$

To platí, ak sa osobné vozidlo počas manévru nezastavilo. Overíme rýchlosť pohybu osobného vozidlo po uplynutí času t_3

$$v_3 = v_1 + a\,t_3 = v_1 - \sqrt{(l + 2\,d_4)\,f\,g}$$, pre dané hodnoty $v_3 \approx 8{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} > 0$.

Vozidlo pribrzdí na rýchlosť približne 30 km/h a zaradí sa za kamión (ak to stihne).
Protiidúci kamión urazí za čas t_3 vzdialenosť $x_3' = v_0\, t_3$ a osobné vozidlo vzhľadom na cestu vzdialenosť $x_3 = v_1\, t_3 + (1/2)\, a\, t_3^2$. Aby sa vozidlá tesne minuli, musí byť začiatočná vzdialenosť d_3 najmenej

$$d_3 = x_3 + x_3' = (v_1 + v_0)t_3 + \frac{1}{2}a t_3^2 = (v_1 + v_0)\sqrt{\frac{l + 2\,d_4}{f\,g}} - \left(\frac{l}{2} + d_4\right),$$

pre dané hodnoty $d_3 \approx 94$ m.

2. ***Puk na šikmej ploche***

a) Puk sa pohybuje na naklonenej rovine smerom nahor pod účinkom zložky tiažovej sily a sily trenia

$$F_1 = -\,m\,g\sin\alpha - m\,g\,f\cos\alpha.$$

Do zastavenia urazí dráhu

$$x_1 = v\;\; t_1 + \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 \text{, pričom } v_1 = v_0 + \frac{F_1}{m}t_1 = 0 .$$

Odtiaľ dostaneme

$$t_1 = \frac{v_0}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} \qquad \text{a} \qquad x_1 = \frac{v_0^2}{2\,g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} .$$

V hornej polohe pôsobí na puk zložka tiažovej sily a proti smeru pohybu (smerom nahor) sila trenia

$$F_2 = m\,g\sin\alpha - m\,g\,f\cos\alpha. .$$

Podmienkou pohybu nadol je $F_2 > 0$. Podmienku overíme pre jednotlivé prípady:
Pre $\alpha_1 = 60°$ $F_{21}/m = 0{,}49\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} > 0$, pre $\alpha_2 = 40°$ $F_{22}/m = 0{,}068\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} > 0$, pre $\alpha_3 = 30°$ $F_{23}/m = -0{,}15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} < 0$. V prvých dvoch prípadoch sa bude puk pohybovať nadol, v treťom prípade zostane stáť v hornej polohe.

Celková dráha puku je v jednotlivých prípadoch

$$s_1 = 2x_1 = \frac{v_0^2}{g\left(\sin\alpha_1 + f\cos\alpha_1\right)}$$, pre dané hodnoty $s_1 \approx 8{,}2$ m,

$$s_2 = 2x_1 = \frac{v_0^2}{g\left(\sin\alpha_2 + f\cos\alpha_2\right)}$$, pre dané hodnoty $s_2 \approx 8{,}4$ m,

$$s_3 = x_1 = \frac{v_0^2}{2g\left(\sin\alpha_3 + f\cos\alpha_3\right)}$$, pre dané hodnoty $s_3 \approx 4{,}4$ m.

b) Smerom nadol sa puk pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením $a_2 = F_2/m$ na dráhe x_1. Čas pohybu

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_2}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}}\ .$$

Hľadaný pomer

$$p = \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}}\,,$$

pre jednotlivé uhly sklonu $p_1 \approx 0{,}63$; $p_2 \approx 0{,}24$; pre tretí prípad pohyb nazad nenastane, preto $t_2 \to \infty$ a $p_3 = 0$.

3. *Zrážka*

a) Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy

$$M u_1 - m v_1 = M u_2 - m v_2\,,$$

kde u_1 a u_2 sú rýchlosti gule pred zrážkou a po nej, v_1, v_2 rýchlosti strely pred zrážkou a po nej.

Rýchlosti gule určíme z uhlu vychýlenia pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} M u_1^2 = M g l\left(1 - \cos\alpha\right)\,, \qquad \frac{1}{2} M u_2^2 = M g l\left(1 - \cos\beta\right).$$

Pokles rýchlosti strely

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{M}{m}\left(u_1 - u_2\right) = \frac{M}{m}\sqrt{2gl}\left(\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\beta}\right).$$

b) Prírastok vnútornej energie je rovný zmene kinetickej energie sústavy

$$\Delta U = \frac{1}{2} M\left(u_1^2 - u_2^2\right) + \frac{1}{2} m\left(v_1^2 - v_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} M\left(u_1^2 - u_2^2\right) + \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m\left[v_1 - \frac{M}{m}\left(u_1 - u_2\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M\left(u_1 - u_2\right)\left[\left(u_1 + u_2\right) + 2v_1 - \frac{M}{m}\left(u_1 - u_2\right)\right]$$

Ak ide o vystrelenú strelu, platí $v_1 >> u_1 > u_2$. V hranatej zátvorke je výrazne najväčší stredný člen a teda približne platí

$$\Delta U \approx M\left(u_1 - u_2\right)v_1 = M v_1\sqrt{2gl}\left(\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\beta}\right).$$

Pomerná časť pôvodnej energie

$$p = \frac{\Delta U}{\frac{1}{2} M u_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2} = \sqrt{\frac{2 v_1^2}{g l}} \frac{\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\beta}}{1-\cos\alpha + \frac{m}{M}\frac{v_1^2}{2 g l}} .$$

4. *Letecký deň*

Teleso padá šikmým vrhom nadol. Ak neuvažujeme odpor vzduchu, pôsobí na teleso počas letu iba tiažová sila a tá mu udeľuje v zvislom smere zrýchlenie g. Pohyb je opísaný rovnicami

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = -v_0 \sin\alpha$$

$$x = v_0\, t \cos\alpha \qquad y = h - v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Dopad na cieľ je daný podmienkou: $t = t_D$, $x = x_D$, $y = 0$. Po dosadení do všeobecných rovníc a úprave dostaneme hľadané výsledky.

a) Čas dopadu určíme z rovnice pre výšku

$$t_D^2 + 2\frac{v_0}{g} t_D \sin\alpha - \frac{2h}{g} = 0 ,$$

ktorej riešenie má tvar

$$t_D = -\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} .$$

(*Pozn.: Pre druhé riešenie kvadratickej rovnice je $t_D < 0$, a preto nezodpovedá riešenej situácii)*

b) Z rovnice pre vodorovnú súradnicu dostaneme

$$x_D = v_0\, t_D \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}} - 1\right).$$

5. *Dve družice*

Družice sa pohybujú po kružnicovej trajektórii v dôsledku pôsobenia dostredivej gravitačnej sily, ktorá im udeľuje dostredivé zrýchlenie

$$a_d = \frac{v^2}{r} = G\frac{M_Z\, m}{r^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2} .$$

Polomer trajektórie

$$r = g_0 \frac{R^2}{v^2} .$$

Čas obehu družice

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\, g_0 \frac{R^2}{v^3} .$$

a) Najmenšia vzdialenosť družíc je vtedy, keď sa obidve nachádzajú na spoločnej radiálnej polpriamke

$$d_{\min} = |r_1 - r_2| = g_0 \, R^2 \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right),$$ pre dané hodnoty $d_{\min} \approx 172{,}5$ km.

b) Najmenšia vzdialenosť družíc bude vtedy, keď sa budú opäť nachádzať na spoločnej radiálnej polpriamke. V dôsledku rôznej uhlovej rýchlosti obehu sa uhol φ medzi radiálnymi polpriamkami, na ktorých sa družice nachádzajú, s časom mení

$$\varphi = |\omega_2 - \omega_1| \, t = \left| \frac{v_2}{r_2} - \frac{v_1}{r_1} \right| t = \frac{|v_2^3 - v_1^3|}{g_0 \, R^2} \, t \, .$$

Na spoločnej radiálnej polpriamke budú družice opäť ak $\varphi = 2\pi$ rad. Odtiaľ dostaneme čas

$$t_{\min} = \frac{2\pi \, g_0 \, R^2}{|v_2^3 - v_1^3|},$$ pre dané hodnoty $t_{\min} \approx 1{,}400 \times 10^5$ s $\approx$ 38 h 53 m.

6. ***Disk v nádobe s vodou***

Predpokladáme, že rúrka je na dolnom konci otvorená, takže vo vnútri rúrky je atmosférický tlak. Ak nemá disk vyplávať, musí v naznačenej polohe priliehať k rúrke a tým znemožniť vytekaniu vody z nádoby. Na disk pôsobia v zvislom smer tlakové sily F_1 (zhora nadol) a F_2 (smerom nahor) zodpovedajúce tlaku na príslušnej ploche.

$$F_1 = \frac{\pi D^2}{4} \left(p_\mathrm{a} + H \rho_0 \, g \right)$$

$$F_2 = \frac{\pi \left(D^2 - d^2 \right)}{4} \left[p_\mathrm{a} + (H + h) \rho_0 \, g \right] + \frac{\pi d^2}{4} \, p_\mathrm{a} \, .$$

Podmienka stability disku $F_\mathrm{g} < F_2 - F_1$. Pre medzný prípad dostaneme

$$\frac{\pi D^2}{4} \, h \rho_\mathrm{m} \, g = \frac{\pi \left(D^2 - d^2 \right)}{4} \left[p_\mathrm{a} + (H + h) \rho_0 \, g \right] + \frac{\pi d^2}{4} \, p_\mathrm{a} - \frac{\pi D^2}{4} \left(p_\mathrm{a} + H \rho_0 \, g \right)$$

a po úprave

$$\rho > \rho_\mathrm{m} = \rho_0 \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \, \frac{H + h}{h} \right).$$

7. *Meranie hustoty kvapaliny – experimentálna úloha*

Odvodenie:

Označíme m_0 hmotnosť pohára, m_v hmotnosť vody v pohári, m_k hmotnosť vyšetrovanej kvapaliny v pohári.

V prvom prípade je podmienka rovnováhy

$$\left(m_0 + m_\mathrm{v}\right) d_2 = m_0\, d_1 .$$

Ak je pravítko podložené pod jeho ťažiskom, moment jeho tiažovej sily je nulový.

V druhom prípade je podmienka rovnováhy

$$\left(m_0 + m_\mathrm{v}\right) d_4 = \left(m_0 + m_\mathrm{k}\right) d_3 .$$

Z rovníc vylúčime hmotnosť pohára a dostaneme

$$m_\mathrm{k} = m_\mathrm{v}\, \frac{d_4\, d_1 - d_2\, d_3}{d_3\left(d_1 - d_2\right)} .$$

Ak je objem vyšetrovanej kvapaliny a vody rovnaký, je pomer hmotností rovný pomeru hustôt $m_\mathrm{k}/m_v = \rho/\rho_0$. Dosadením do predchádzajúceho vzťahu dostaneme dokazovaný vzťah.

55. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy domáceho kola kategórie D***

Autori úloh:	Milan Grendel (1), Dušan Nemec (2), Ľubomír Konrád (2, 3–7)
Recenzia:	Ivo Čáp, Aba Teleki
Redakcia:	Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013