

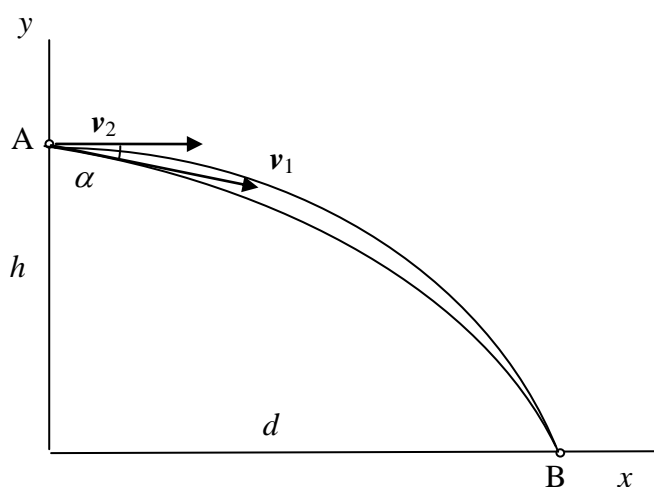
55. ročník Fyzikálnej olympiády  
v školskom roku 2013/2014

**Riešenie úloh krajského kola kategórie B**

(ďalšie informácie na <http://fo.uniza.sk> a [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk))

**1. Strel'ba z útesu**

- a) Obrázok RC-1. Trajektória strely prvého dela je vodorovný vrh, druhej strely šikmý vrh. Keďže let druhej strely trvá kratšie pri väčšej rýchlosti výstrelu, musí delo vystreliť šikmo nadol, tzn.  $\alpha < 0$ . 2b



Obr. RC-1

- b) Oba vrhy spája rovnaký vodorovný dostrel a rovnaký čas dopadu strely. Trajektória vodorovného vrhu je opísaná rovnicami

$$x = v_2 t \tag{1}$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Pre dopad strely:  $t = t_B$ ,  $y_B = 0$ ,  $x_B = d$  dostaneme z rovnice (2)

$$t_B = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3}$$

Pre dané hodnoty veličín  $t_B \approx 5,5$  s. 2b

po vylúčení času dopadu  $t_B$

$$d = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4}$$

Pre dané hodnoty veličín  $d \approx 1,11$  km 2b

- c) Trajektóriu šikmého vrhu určujú vzťahy

$$x = v_1 (t - \tau) \cos \alpha$$

$$y = h + v_1 (t - \tau) \sin \alpha - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2.$$

Pre dopad strely môžeme z týchto vzťahov písať

$$d = v_1 (t_B - \tau) \cos \alpha \quad (5)$$

$$0 = h + v_1 (t_B - \tau) \sin \alpha - \frac{1}{2} g (t_B - \tau)^2. \quad (6)$$

Ak z rovníc (5) a (6) vylúčime člen  $(t_B - \tau)$ , dostaneme rovnicu pre uhol výstrelu

$$\frac{g d^2}{2 v_1^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} - h - d \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0,$$

ktorú upravíme s použitím pomôcky v zadaní na tvar kvadratickej rovnice

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \frac{v_1^2}{g d} \operatorname{tg} \alpha + 1 - \frac{2 v_1^2 h}{g d^2}, \quad 1b$$

ktorá má riešenie

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v_1^2}{g d} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1^2}{g d}\right)^2 + \frac{2 v_1^2 h}{g d^2} - 1} = \\ &= \frac{v_1^2}{v_2 \sqrt{2 g h}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1^2}{v_2 \sqrt{2 g h}}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Pre dané hodnoty veličín máme  $\alpha \approx -4,29^\circ$  (druhé riešenie  $86,6^\circ$  nezodpovedá predpokladu  $\alpha < 0$ )

2b

Z rovnice (5) určíme pre vypočítaný uhol  $\alpha$  výstrelu časové oneskorenie

$$\tau = t_B - \frac{d}{v_1 \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{d}{v_1 \cos \alpha}.$$

Pre dané hodnoty  $\tau \approx 1,82$  s.

1b

## 2. Dopad telesa na planétu Mars

- a) Teleso sa pohybuje po hyperbolickej trajektórii. Uvažujme trajektóriu, ktorá sa dotýka povrchu a predstavuje hraničnú trajektóriu dopadu na povrch.

Pri pohybe telesa v gravitačnom poli Marsu sa zachováva mechanická energia

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{m M}{r_1}, \quad (1) \quad 2b$$

kde  $r_1$  je najmenšia vzdialenosť od stredu,  $r_1 = R$ ,  $v_1$  je rýchlosť telesa v tejto vzdialenosti. Keďže gravitačná sila smeruje do stredu Marsu, je moment gravitačnej sily vzhľadom na stred Marsu nulový, a preto sa zachováva moment hybnosti telesa. Pre vzdialenosť  $d_m$  maximálneho priblíženia, kedy má vektor rýchlosti smer dotýčnice k povrchu, platí

$$m v_0 d_m = m v_1 R. \quad (2) \quad 2b$$

Pre bod maximálneho priblíženia na dotyčnicovej trajektórii

$$d_m = R \sqrt{1 + 2G \frac{M}{R v_0^2}}. \text{ Pre dané hodnoty } d_m \approx 1,05 R. \quad 2b$$

- b) Z rovnice (1) vyplýva, že rýchlosť dopadu na povrch Marsu nezávisí od hodnoty faktoru  $k$

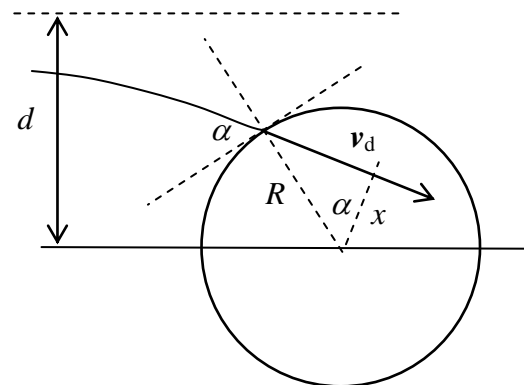
$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2G \frac{M}{R}}. \quad (3) \quad 2b$$

Pre dané hodnoty veličín  $v_d \approx 15,8$  km/s.

- c) Na obrázku RB2-1 je znázornený dopad telesa na povrch Marsu. Na určenie uhlu dopadu využijeme zákon zachovania momentu hybnosti. Vo veľkej vzdialenosti je hybnosť telesa  $L = m v_0 d$ . V bode dopadu je moment hybnosti telesa  $L = m v_d x$ , kde  $x = R \cos \alpha$ . Z rovnosti momentov hybnosti a pomocou výsledku (3) máme

$$\cos \alpha = \frac{d}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2GM}{v_0^2 R}}} = k.$$

Pre danú hodnotu  $k$  máme  $\alpha = 60^\circ$ .



Obr. RB2-1

2b

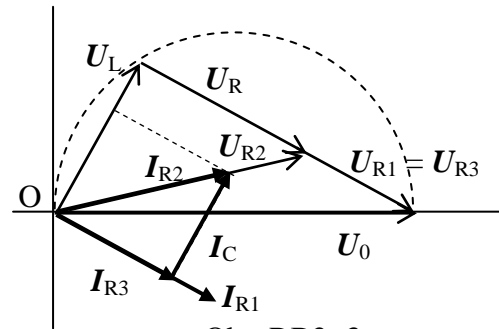
### 3. Mostík na meranie parametrov cievky

a) Fázorový diagram je na obrázku RB2-3.

3b

Postup:

Na reálnu os vynesieme fázor  $U_0$  napätia zdroja. Fázory napätí  $U_L$  a  $U_R$ , resp.  $U_{R1}$  sú vzájomne posunuté o  $90^\circ$ , tzn. v diagrame sú vzájomne kolmé. Pomocou Thálesovej kružnice nad priemerom  $U_0$  zostrojíme fázor  $U_L$  zo začiatku O do bodu kružnice a dvojicu fázorov  $U_R$  a  $U_{R1}$ . Vo



Obr. RB2-3

vyváženom mostíku  $U_{R1} = U_{R3}$  a zároveň  $U_0 = U_{R2} + U_{R1}$ . Zo začiatku diagramu do začiatočného bodu fázora  $U_{R1}$  vynesieme fázor napätia  $U_{R2}$ . V diagrame sú znázornené i prúdy  $I_{R3}$  rovnobežný s  $U_{R3}$  (sú vo fáze),  $I_{R2}$  rovnobežný s  $U_{R2}$  (sú vo fáze) a  $I_C$  je kolmý na  $I_{R3}$ . Prúd  $I_{R1}$  má rovnaký smer ako  $U_{R1}$  a teda ako prúd  $I_{R3}$ . 2b

b) Fázor výstupného napätia  $U_{AB} = U_{R1} - U_C$ . Ľavá vetva predstavuje delič napätia, pričom fázor napätia na rezistore s odporom  $R_1$

$$U_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R + j\omega L} U_0. \quad 1b$$

Pravá vetva je tiež delič napätia a fázor napätia na paralelnej kombinácii rezistora a odporom  $R_3$  a kondenzátora s kapacitou  $C$

$$U_C = \frac{\frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C}}{R_2 + \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C}} U_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_3} + j\omega C R_2} U_0. \quad 1b$$

Fázor výstupného napätia

$$U_{AB} = U_{R1} - U_C = \left( \frac{1}{1 + \frac{R}{R_1} + j\omega \frac{L}{R_1}} - \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_3} + j\omega C R_2} \right) U_0. \quad 1b$$

Fázor  $U_{AB} = 0$ , ak výraz v zátvorke je nulový, ak sú komplexné čísla v menovateľoch oboch zlomkov rovnaké, teda

$$1 + \frac{R}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_3}, \quad \frac{L}{R_1} = C R_2,$$

odkiaľ máme

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad L = C R_1 R_2. \quad 2b$$

#### 4. Al-Fe lana

- a) Celkový výkon prenášaný vedením  $P = 3 U I$ , a teda prúd vo fázových vodičoch

$$I = \frac{P}{3U}. \text{ pre dané hodnoty } I \approx 152 \text{ A.} \quad 2b$$

- b) Dĺžková hmotnosť lana

$$\mu = S_{\text{Fe}} \rho_{\text{Fe}} + S_{\text{Al}} \rho_{\text{Al}} = \frac{\pi d^2}{4} (\rho_{\text{Fe}} + 6 \times \rho_{\text{Al}}).$$

Pre dané hodnoty  $\mu \approx 170 \text{ kg/km}$ . 2b

Dĺžkový elektrický odpor lana

$$\rho = \frac{1}{\gamma_{\text{Fe}} S_{\text{Fe}} + \gamma_{\text{Al}} S_{\text{Al}}} = \frac{4}{\pi d^2} \frac{1}{\gamma_{\text{Fe}} + 6 \times \gamma_{\text{Al}}}.$$

Pre dané hodnoty  $\rho \approx 0,62 \text{ } \Omega/\text{km}$ . 2b

- c) Stratový výkon vo vedení s tromi vodičmi

$$P_s = 3 \times R I^2 = 3 \times \rho l I^2. \text{ Pre dané hodnoty } P_s = 2,1 \text{ MW.} \quad 1b$$

Účinnosť prenosu na uvedenej trase

$$\eta = 1 - \frac{P_s}{P}. \text{ Pre dané hodnoty } \eta \approx 79 \%. \quad 1b$$

*Pozn.: Z výsledku vidno, že prenos energie elektrickým vedením na krátke vzdialenosti (pri nižších napätiach) má pomerne nízku účinnosť. Pre prenos tepla je oveľa účinnejší prenos energie pomocou horúcej vody (účinnosť až 98 %) na podobnej trase.*

- d) Chladenie lana je dané najmä prestupom tepla do okolitého vzduchu. Výkonová rovnováha je daná rovnicou

$$\alpha S_p (t - t_0) = P_s,$$

kde  $S_p = \pi D l$  je obsah povrchu lana, pričom  $D = 3 d$ .

Teplota povrchu drôtu

$$t = t_0 + \frac{P_s}{\alpha S_p} = t_0 + \frac{\rho I^2}{\alpha \pi d}.$$

Pre dané hodnoty veličín  $t \approx 121 \text{ } ^\circ\text{C}$ . 2b

---

#### 55. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy krajského kola kategórie B

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1), Ivo Čáp (2, 3, 4)

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014