55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014
Krajské kolo kategórie E
16. apríla 2014

Riešenie úloh

1. *Lode na rieke*

a) Pre pohyb lodí platí

$$s = (v_L + v_v)\,t_1 + (v_L - v_v)\,t_2,$$ ***2 body***

odkiaľ rýchlosť prúdu v rieke je

$$v_v = \frac{s - v_L(t_1 + t_2)}{t_1 - t_2}.$$ Pre dané hodnoty veličín v_v = 3,0 km/h. ***2 body***

b) Vzdialenosť osady C od prístavu A je

$$d = (v_L + v_v)\,t_1.$$ Pre dané hodnoty veličín d = 23 km. ***1 bod***

c) Loď, ktorá sa plaví po prúde, prepláva polovicu vzdialenosti medzi prístavmi A a B za čas t_1', pričom platí

$$\frac{s}{2} = (v_L + v_v)\,t_1',$$ ***1 bod***

odkiaľ

$$t_1' = \frac{s}{2(v_L + v_v)}.$$ ***1 bod***

Druhá loď, ktorá sa plaví proti prúdu, prepláva polovicu vzdialenosti medzi prístavmi A a B za čas t_2', pričom platí

$$\frac{s}{2} = (v_L - v_v)\,t_2',$$ ***1 bod***

odkiaľ

$$t_2' = \frac{s}{2(v_L - v_v)}.$$ ***1 bod***

Hľadaný časový odstup je potom

$$\Delta t = t_2' - t_1' = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_L - v_v} - \frac{1}{v_L + v_v}\right) = s\,\frac{v_v}{(v_L - v_v)(v_L + v_v)}.$$

Pre dané hodnoty veličín: o čas $\Delta t \approx 0{,}44$ h ≈ 26 min musí vyštartovať loď z prístavu B skôr ako loď z prístavu A ***1 bod***

2. *Páková váha*

Riešenie je založené na určení rovnovážnej polohy páky.

a) Rovnováha váhy je daná rovnosťou momentov pôsobiacich síl vzhľadom na os otáčania páky (bod uchytenia závesu)

$$m\,g\,a = m_0\,g\,x + M\,g\left(\frac{d}{2} - a\right). \qquad \textbf{\textit{2 body}}$$

Z tejto rovnice určíme neznámu hmotnosť m váženého telesa

$$m = m_0\frac{x}{a} + \frac{M(d/2 - a)}{a} = \frac{1}{a}\left[m_0\,x + M\,(d/2 - a)\right].$$

Pre dané hodnoty m = 5,5 kg. ***2 body***

b) Najväčšiu hmotnosť $m_{\max}$ váženého telesa zodpovedá posunutiu závažiu do pravej krajnej polohy páky. Pre momenty síl potom platí

$$m_{\max}g\,a = m_0 g\,(d - a) + M\,g\left(\frac{d}{2} - a\right) \qquad \textbf{\textit{2 body}}$$

a hľadaná najväčšia hmotnosť je

$$m_{\max} = \frac{m_0(d - a) + M(d/2 - a)}{a} = m_0\,(\frac{d}{a} - 1) + M\,(\frac{d}{2a} - 1).$$

Pre dané hodnoty veličín $m_{\max} \approx 7{,}7$ kg. ***2 body***

c) Ak použijeme posuvné závažie s hmotnosťou 2 m_0, po dosadení do predchádzajúceho vzťahu máme $m_{\max 2} = \dfrac{2m_0(d - a) + M(d/2 - a)}{a}$, pre dané hodnoty $m_{\max 2} \approx 14$ kg.

$m_{\max 2} < 2m_{\max}$, takže spomínaný žiak nemal pravdu. ***2 body***

3. *Varenie čaju*

Aby voda s hmotnosťou m_1 zovrela, treba jej dodať teplo

$$Q_1 = m_1 c(t_2 - t_1) = \tau_1 P, \qquad (1) \qquad \textbf{\textit{1 bod}}$$

kde c je hmotnostná tepelná kapacita vody, t_1 je teplota vody vo vedre, t_2 = 100 °C je teplota varu vody, P je výkon pece.

Aj druhú dávku vody s hmotnosťou m_2 je potrebné zohriať z teploty t_1 na teplotu varu vody t_2. Na zohriatie je potrebné teplo

$$Q_2 = m_2 c(t_2 - t_1) = \tau_2 P. \qquad (2) \qquad \textbf{\textit{1 bod}}$$

Delením rovníc (1) a (2) dostaneme pomer $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\tau_1}{\tau_2}$. ***2 body***

Ak zmiešame obe dávky vody dohromady, platí rovnica

$$m_1 c\Delta t = m_2 c(t_2 - \Delta t - t_1). \qquad \textbf{\textit{2 body}}$$

Z tejto rovnice dostávame pomer $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{t_2 - \Delta t - t_1}{\Delta t}$. ***2 body***

Skombinovaním rovníc pre pomer hmotností vody dostávame hľadanú teplotu

$t_1 = t_2 - \Delta t\left(1 + \dfrac{\tau_1}{\tau_2}\right)$. Pre dané hodnoty veličín t_1 = 16 °C. ***2 body***

4. *Batysféra*

a) Hmotnosť prázdnej batysféry je daná hmotnosťou oceľového plášťa

$$M = \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R-a)^3\right]\rho_1.$$ Pre dané hodnoty $M \approx 1{,}84$ t. ***1 bod***

Hmotnosť vody s objemom rovným objemu batysféry

$$M_{\mathrm{v}} = \frac{4}{3}\pi R^3\ \rho_1.$$ Pre dané hodnoty M_{v} = 1,80 t. ***1 bod***

Keďže $M_{\mathrm{v}} < M$, podľa Archimedovho zákona batysféra nebude plávať na hladine mora, ale ponorí sa pod hladinu. ***2 body***

b) Sila napínajúca lano

$$F_0 = (M + m - M_{\mathrm{v}})g.$$ Pre dané hodnoty F_0 = 1,2 kN. ***2 body***

c) Horná časť lana je zaťažená nielen batysférou, ale i celou dĺžkou lana, na ktorom je zavesená. Najväčšia ťahová sila pôsobí na horný koniec lana a preto tam hrozí najviac pretrhnutie.

Ak je dĺžka lana h, tiažová sila, ktorá pôsobí na batysféru s lanom je

$$F_1 = (M + m + \mu h)g$$ ***1 bod***

a celková vztlaková sila pôsobiaca na batysféru a lano

$$F_2 = \left(M_{\mathrm{v}} + \frac{\pi d^2}{4}h\,\rho_0\right)g.$$ ***1 bod***

Celková sila, ktorá napína lano na hornom konci

$$F = (M + m - M_{\mathrm{v}})g + \left(\mu - \frac{\pi d^2}{4}\rho_0\right)hg.$$ ***1 bod***

Pre maximálnu silu F_{m} dostaneme hĺbku

$$h_{\mathrm{m}} = \frac{\dfrac{F_{\max}}{g} - (M + m - M_{\mathrm{v}})}{\mu - \dfrac{\pi d^2}{4}\rho_0}.$$ Pre dané hodnoty $h_{\mathrm{m}} \approx 1{,}3$ km. ***1 bod***

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie E*

Autor úloh: Ľubomír Konrád
Recenzia: Daniel Kluvanec, Ivo Čáp
Redakcia: Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014