56. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2014/2015

Kategória A – celoštátne kolo

riešenie úloh

1. *Stan ako akustická šošovka*

Riešenie:

a) Rovnicu vyjadríme pomocou jednotiek veličín $(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^{\alpha} = (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2})^{\beta} \times (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})^{\gamma}$

m: $\alpha = -\beta - 3\gamma$

kg: $0 = \beta + \gamma$

s: $-\alpha = -2\beta$

Vidíme, že trojicu rovníc možno splniť súčasne pre hodnoty $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$.

Výsledný tvar vzťahu

$$v = \sqrt{\frac{k\,p}{\rho}}\,. \qquad (1) \qquad 2b$$

Ak považujeme plyn za ideálny, je jeho hustota $\rho = \dfrac{p\,M}{R_\mathrm{m}\,T}$,

kde M je molárna hmotnosť a T termodynamická teplota. Dosadením do (1) máme

$$v = \sqrt{\frac{k}{M}\,R_\mathrm{m}\,T}\,. \qquad (2)$$

Vyjadríme faktor $k = \dfrac{M\,v^2}{R_\mathrm{m}\,T}$ a po dosadení nameraných hodnôt $k \approx 1{,}40$. 2b

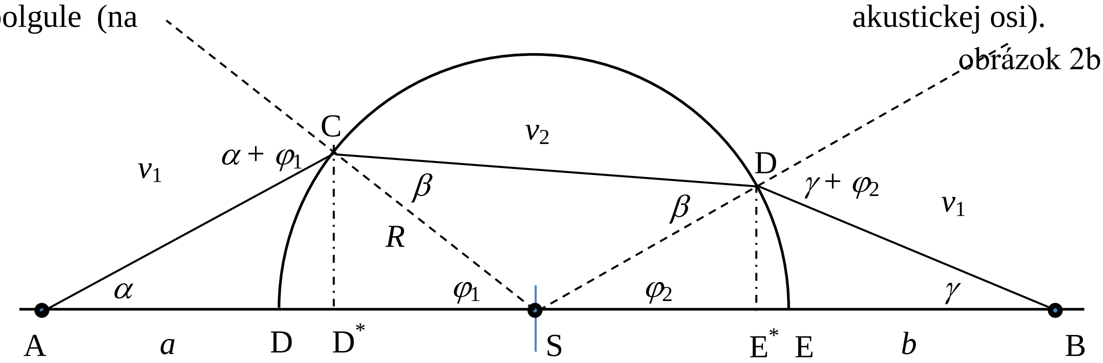
Pozn.: Faktor k je Poissonova konštanta pre adiabatický dej.

Rozmerové rovnice udávajú iba pomer mocnín α, β a γ. Iným možným riešením je $\alpha = 1$, $\beta = ½$ a $\gamma = -½$. Potom dostaneme vzťah

$$v = k^{*}\sqrt{\frac{p}{\rho}}\,,\ \text{kde } k^{*} \approx 1{,}18.$$

b) Stan pôsobí pre zvukové vlny ako guľová šošovka. Keďže je v stane nižšia teplota, je v ňom nižšia rýchlosť zvuku ako v okolí stanu. Na rozhraní teplého a chladného vzduchu dochádza k lomu lúčov podľa Snellovho zákona lomu. Lúče vychádzajúce z miesta A sa lámu pri vstupe v bode C do stanu a potom pri výstupe v bode D zo stanu. V obidvoch prípadoch sa lámu smerom k akustickej osi. Lúče vystupujúce z bodu A sa tak môžu sústrediť na druhej strane stanu v bode B, ktorý sa nachádza na spojnici bodu A a stredu polgule (na akustickej osi).

obrázok 2b



Obr. RA3–1

c) Uvažujeme podľa obrázku lúč ACDB. Označíme $AD^* = a^*$ a $E^*B = b^*$. Potom platí

$$a^* \operatorname{tg}\alpha = R \sin\varphi_1 \qquad b^* \operatorname{tg}\gamma = R \sin\varphi_2$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\beta$$

a podľa Snelovho zákona lomu

$$\frac{\sin(\alpha+\varphi_1)}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \frac{\sin(\gamma+\varphi_2)}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

kde v_1 a v_2 sú rýchlosti šírenia zvuku vo vzduchu pri teplotách t_1 a t_2 podľa vzťahu (2). Sústavu vzťahov vyjadríme v približnom tvare pre malé uhly α a γ. V tom prípade $a^* \to a$ a $b^* \to b$.

$$a\,\alpha = R\,\varphi_1 \qquad b\gamma = R\,\varphi_2 \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = 2\beta$$

$$\alpha + \varphi_1 = \frac{v_1}{v_2}\,\beta \qquad \gamma + \varphi_2 = \frac{v_1}{v_2}\,\beta.$$

Úpravou tejto sústavy rovníc dostaneme

$$\frac{R}{a}\varphi_1 + \varphi_1 = \frac{v_1}{v_2}\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\text{, resp.} \quad \left(\frac{R}{a} + 1 - \frac{v_1}{2v_2}\right)\varphi_1 = \frac{v_1}{2v_2}\varphi_2$$

$$\frac{R}{b}\varphi_2 + \varphi_2 = \frac{v_1}{v_2}\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\text{, resp.} \quad \left(\frac{R}{b} + 1 - \frac{v_1}{2v_2}\right)\varphi_2 = \frac{v_1}{2v_2}\varphi_1.$$

Súčin rovníc upravíme

$$\left(\frac{R}{a} + 1 - \frac{v_1}{2v_2}\right)\left(\frac{R}{b} + 1 - \frac{v_1}{2v_2}\right) = \left(\frac{v_1}{2v_2}\right)^2$$

a ďalej $\left(\dfrac{R}{a} + 1\right)\left(\dfrac{R}{b} + 1\right) = \dfrac{v_1}{2v_2}\left(\dfrac{R}{a} + \dfrac{R}{b} + 2\right).$

Vzdialenosť b vyjadríme napr. pomocou vzťahu

$$\frac{R}{b} = \frac{1}{\dfrac{2v_2}{v_1} - \dfrac{1}{\dfrac{R}{a}+1}} - 1.$$

K sústredeniu zvukových vĺn dôjde, ak je hodnota b kladná a konečná. Limitný prípad $b \to \infty$. Pre túto limitu dostávame medznú hodnotu a_m

$$a_m = R\,\frac{2v_2 - v_1}{2v_1 - 2v_2} = R\,\frac{2\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}}{2\sqrt{T_1} - 2\sqrt{T_2}}.$$

Pre dané hodnoty $a_m \approx 144$ m. 2b

$$b = R\left[\frac{(R+a)v_1}{(v_1 - 2v_2)(R+a) + av_1} - 1\right] = R\left[\frac{(R+a)\sqrt{T_1}}{\left(\sqrt{T_1} - 2\sqrt{T_2}\right)(R+a) + a\sqrt{T_1}} - 1\right].$$

Pre dané hodnoty $b \approx 337$ m. 2b

Poučenie: Pozor! Aj za stanom možno počuť rozhovor osôb pred stanom za uvedených podmienok.

2. *Atómová elektráreň*

Riešenie:

a) Energetický zisk reakcie zodpovedá úbytku pokojovej energie sústavy

$$E_1 = \Delta E = \frac{1}{c^2}\left(m_{\mathrm{U235}} - m_{\mathrm{Ba140}} - m_{\mathrm{Zr94}} - m_{\mathrm{n}}\right)$$

Pre dané hodnoty $E_1 = 3{,}26\times10^{-11}$ J ≈ 204 MeV. 1b

b) Kinetická energia relativistických elektrónov

$$E_2 = E_{\mathrm{k}} = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m_0\, c^2 .$$

odkiaľ

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{\mathrm{k}}}{m_0\, c^2} + 1\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_2}{m_0\, c^2} + 1\right)^2}} .$$

Pre dané hodnoty $v \approx 0{,}9935\, c$.

Rýchlosť svetla vo vode $v_{\mathrm{v}} = c/n$, pre dané hodnoty $v_{\mathrm{v}} \approx 0{,}752\, c$. 2b

Ako vidno, elektróny sa pohybujú vo vode (moderátore) rýchlejšie ako svetlo a v takom prípade vzniká Čerenkovov jav. Intenzita Čerenkovovho žiarenia je v oblasti viditeľného svetla priamo úmerná frekvencii, a preto v žiarení prevažuje modré svetlo. 1b

c) Objemový prietok vody

$$Q_V = \frac{P}{\rho\, c_{\mathrm{v}} \Delta\vartheta}$$. Pre dané hodnoty $Q_V \approx 12{,}1\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$. 2b

d) Uvoľnené teplo $Q = P\,t$, čo predstavuje počet štiepení $N = Q / E_1$. Keďže pri každom štiepení vznikajú podľa (1) dva rýchle neutróny, je počet rýchlych neutrónov uvoľnených za čas t

$$N_{\mathrm{n}} = 2\,\frac{P\,t}{E_1}$$. Pre dané hodnoty $N_{\mathrm{n}} \approx 9{,}00\times10^{19}$.

Pri každom štiepení sa spotrebuje jedna molekula UO_2 izotopu $^{235}_{92}U$ s hmotnosťou (m_U + 2 m_O) u. Vzhľadom na relatívny obsah p_1 izotopu $^{235}_{92}U$ v novom palive je pri výkone P celkový úbytok paliva za deň $m = m_1/p_1$.

Na $N_1 = p_1 N$ atómov U235 pripadá $N_2 = (1-p_1) N$ atómov U238

hmotnosť paliva $m_1 = N_1 (m_{U235} + 2m_O)$ u + $N_2 (m_{U238} + 2m_O)$ u

a po dosadení

$$m = \frac{Pt}{E_1} \mathrm{u} \left[\left(m_{U235} + 2m_O \right) + \frac{1-p_1}{p_1} \left(m_{U238} + 2m_O \right) \right].$$

Pre dané hodnoty $m \approx 35{,}8$ kg. 2b

Hmotnosť náplne reaktora

$$M = \left[N_1 \left(m_{U235} + 2m_O \right) + \frac{1-p_1}{p_1} N_1 \left(m_{U238} + 2m_O \right) \right] \mathrm{u}\,,$$

kde N_1 je počet atómov U235 v palivovom článku.

Keďže "vyhorené" palivo má ešte obsah p_2 percent U235 potom "vyhorenia" palivového článku sa zúčastní $N_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right)$ atómov, pre ktoré platí $N_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) = \frac{P t_v}{E_1}$.

Ak vyjadrime počet atómov N_1 pomocou hmotnosti palivového článku M a dosadíme do predchádzajúceho vzťahu dostaneme

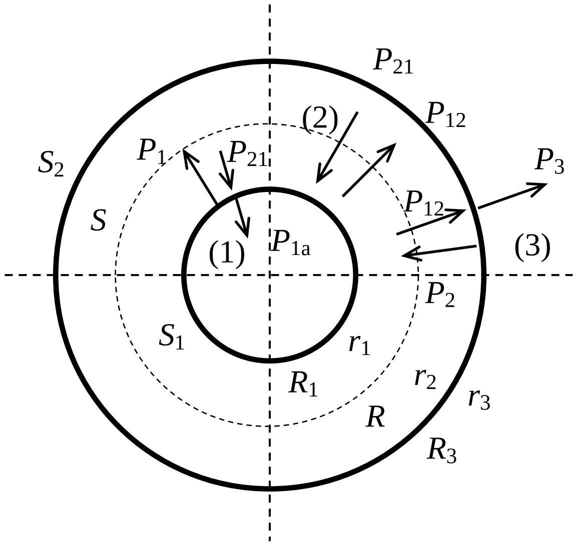
$$t_v = M \frac{\Delta E}{P\,\mathrm{u}} \frac{p_1 - p_2}{p_1 \left(m_{U235} + 2m_O \right) + \left(1 - p_1 \right) \left(m_{U238} + 2m_O \right)}$$

Pre dané hodnoty $t_v \approx 8{,}39 \times 10^7$ s $\approx 2{,}66$ roku. 2b

3. *Vesmírna sonda*

Riešenie:

a)



Obr. RA3–2

obrázok 2b

Zo zákona zachovania energie vyplýva, že v ustálenom stave prechádza každou guľovou plochou s polomerom $R \geq R_1$ prechádza výkon P rovný výkonu zdroja.

Ak na plochu telesa (reaktora alebo krytu) dopadá žiarenie s výkonom P_d, časť $P_a = (1-r)\,P_d$ sa telesom pohltí a časť $P_r = r\,P_d$ sa odrazí naspäť. Ak má teleso teplotu T, jeho povrch vyžaruje výkon $P_e = (1-r)\,S\,\sigma T^4$, kde $1-r$ je absorptivita rovná aj emisivite (schopnosti povrchu vyžarovať).

Cez plochu S prechádza žiarenie s výkonom P_{12} smerom od stredu a v opačnom smere žiarenie s výkonom P_{21}. Celková bilancia

$$P_{12} - P_{21} = P. \qquad (1)$$

V reaktore sa uvoľňuje výkon P a povrchom sa absorbuje žiarenie s výkonom $(1-r_1)\,P_{21}$. Tento výkon sa povrchom vyžiari

$$P + (1-r_1)\,P_{21} = (1 - r_1)\,S_1\,\sigma T_1^4. \qquad (2)$$

Od povrchu reaktora sa časť $r_1 P_{21}$ dopadajúceho žiarenia odráža, takže z povrchu vychádza žiarenie s výkonom rovným súčtu výkonu emitovaného a odrazeného

$$P_{12} = (1 - r_1)\,S_1\,\sigma T_1^4 + r_1 P_{21}. \qquad (3)$$

Kryt absorbuje časť $(1 - r_2)\,P_{12}$ výkonu dopadajúceho žiarenia. Tento výkon sa z vnútorného i vonkajšieho povrchu vyžiari

$$(1 - r_2)\,P_{12} = (1- r_2)\,S_2\,\sigma T_2^4 + (1 - r_3)\,S_2\,\sigma T_2^4, \qquad (4)$$

kde r_3 je reflektivita vonkajšieho povrchu krytu.

Celkový výkon vyžiarený do vonkajšieho priestoru z povrchu krytu je rovný výkonu zdroja

$$(1 - r_3)\,S_2\,\sigma T_2^4 = P. \qquad (5)$$

Z rovnice (5) určíme teplotu krytu, ktorá, ako vidno, závisí iba od emisivity $(1 - r_1)$ vonkajšieho povrchu

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{P}{(1-r_3)\,S_2\,\sigma}}\,. \tag{6}$$

Nakoľko kryt je tenký a jeho materiál vedie dobre teplo, obidve jeho vyžarovacie plochy sú rovnako veľké a majú teplotu T_2. Z rovníc (1) a (3) vylúčime P_{21}, vyjadríme P_{12} a dosadíme do (4). Odtiaľ určíme T_1.

$$P_{12} = (1-r_1)\,S_1\,\sigma T_1^4 + r_1\,(P_{12} - P),\ \text{resp.}\ P_{12} = S_1\,\sigma T_1^4 - \frac{r_1}{1-r_1}P\,,$$

$$(1-r_2)P_{12} = (2-r_2-r_3)\,S_2\,\sigma T_2^4\,,$$

$$T_1 = \sqrt[4]{\left[\frac{2-r_2-r_3}{(1-r_2)(1-r_3)} + \frac{r_1}{1-r_1}\right]\frac{P}{S_1\,\sigma}} = \sqrt[4]{\left[\frac{2-r_1-r_2-r_3+r_1\,r_2\,r_3}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}\right]\frac{P}{S_1\,\sigma}}\,.$$

Pre dané hodnoty a $r_1 = 0{,}02$ a $r_2 = r_3 = 0{,}98$ máme

$T_1 \approx 728$ K, $T_2 \approx 433$ K. 4b

b) Pre $r_1 = r_2 = 0{,}02$ a $r_3 = 0{,}98$

$T_1' \approx 615$ K, $T_2' \approx 433$ K. 2b

c) Tretia možnosť je $r_1 = r_2 = r_3 = 0{,}02$

$T_1'' \approx 276$ K, $T_2'' \approx 164$ K.

Najnižšia teplota povrchu reaktora zodpovedá tomuto prípadu, keď je kryt na vnútornej i vonkajšej strane čierny. Kryt efektívne vyžaruje do okolia, preto pri danom výkone P je potrebná teplota krytu malá. Tým sa zníži výkon vyžarovaný krytom nazad k reaktoru a keďže aj odrazivosť od krytu smerom nazad k reaktoru je malá, zohrieva reaktor hlavne zdroj. Preto je teplota reaktora minimálna.

2b

4. *Kmity gule*

Riešenie:

a) Po odvalení gule o oblúk $s = R\varphi$ po polguli sa guľa ako aj niť s guľôčkou otočia o uhol $\alpha = s/r$. Zmena výšky ťažiska gule je $-(R + r)(1 - \cos\varphi)$. Polohu guľôčky určíme zložením translačného pohybu gule pri otočení o uhol $\varphi + \alpha$. Zmena výšky guľôčky je $-(R + r)(1 - \cos\varphi) + x[1 - \cos(\varphi + \alpha)]$.

Ak položíme potenciálu energiu v začiatočnej polohe rovnú nule, je potenciálna energia pri vychýlení o uhol φ

$$E_{\mathrm{p}} = -(R+r)(1-\cos\varphi)\, g\,(M+m) + m g x\left[1-\cos(\varphi+\alpha)\right], \qquad (1)$$

po dosadení možno výraz upraviť napr. na tvar

$$E_{\mathrm{p}} = -g\,(M+m)(R+r)(1-\cos\varphi) + m g x\left[1-\cos\varphi\cos\left(\frac{R}{r}\varphi\right)+\sin\varphi\sin\left(\frac{R}{r}\varphi\right)\right].$$

3b

b) Poloha je stabilná, ak pri malej výchylke z tejto polohy potenciálna energia narastie. Pre veľmi malú výchylku, pri ktorej platí $\varphi << 1$ rad a $\varphi << r/R$, upravíme vzťah (1)

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m g\,(R+r)\left[\frac{x}{r}\left(1+\frac{R}{r}\right)-\left(1+\frac{M}{m}\right)\right]\varphi^2 . \qquad (2)$$

Ide o kvadratickú rovnicu paraboly, ktorá má v polohe $\varphi = 0$ minimum, ak je splnená podmienka

$$\frac{x}{r} > \frac{1+\frac{M}{m}}{1+\frac{R}{r}} = \frac{x_{\mathrm{m}}}{r} .$$

2b

Pre prípad 1) $x_{\mathrm{m}}/r = 1 > x/r = 0{,}5$, preto poloha je labilná.

Pre prípad 2) $x_{\mathrm{m}}/r = 0{,}29 < x/r = 0{,}4$, poloha je stabilná

Pre prípad 3) $x_{\mathrm{m}}/r = 0{,}55 < x/r = 0{,}75$, poloha je stabilná 3×0,5b

c) Existencia stabilnej rovnovážnej polohy je podmienkou vzniku kmitavého pohybu, ak je závislosť potenciálnej energie od výchylky kvadratická, ide o kmity harmonické.

Vzťah (2) pre potenciálnu energiu

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k\,\varphi^2 , \text{ kde } k = m g\,(R+r)\left[\frac{x}{r}\left(1+\frac{R}{r}\right)-\left(1+\frac{M}{m}\right)\right].$$

Vyjadríme kinetickú energiu gule a funkciu uhlovej rýchlosti $\dot{\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

Kinetická energia pozostáva z kinetickej energie postupného pohybu hmotného stredu a kinetickej energie rotačného pohybu okolo osi prechádzajúcej hmotným stredom

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(M+m)(R+r)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} M r^2 + m x^2\right)\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 \dot{\varphi}^2$$

a po úprave

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2, \text{ kde } I = m r^2 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 \left[1 + \frac{5}{3}\frac{M}{m} + \frac{x^2}{r^2}\right].$$

Perióda harmonických kmitov

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{R}{r}\right)\left(1 + \frac{5}{3}\frac{M}{m} + \frac{x^2}{r^2}\right)}{\frac{x}{r}\left(1 + \frac{R}{r}\right) - \left(1 + \frac{M}{m}\right)}}$$ 2b

Pre prípad 1) kmity okolo labilnej polohy nenastanú

Pre prípad 2) $T \approx 2{,}6$ s

Pre prípad 3) $T \approx 2{,}0$ s. 3×0,5b

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy celoštátneho kola kategórie A*

Autori úloh: Teleki Aba (1,3), Čáp Ivo (1, 3), Kecskés Arpád (2), Konrád Ľubomír (4)
Recenzia a úprava: Kluvanec Daniel, Mucha Ľubomír
Redakcia: Čáp Ivo
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015