56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Kategória A – domáce kolo
riešenie úloh

1. Valenie gule

Riešenie:

a) Pri pohybe guľôčky bez prešmykovania sa zachováva jej mechanická energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\,\omega^2 = m\,g\left(R+r\right)\left(1-\cos\varphi\right).$$

Pri valivom pohybe platí $\omega = v\,/\,r$. Potom platí

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}\,g\left(R+r\right)\left(1-\cos\varphi\right)}. \qquad (1)$$

b) Ak je guľôčka v polohe s uhlom φ podľa obr. A–1, pôsobí v smere dotyčnice k trajektórii ťažiska sila $F_1 = mg\sin\varphi$ a proti smeru pohybu sila trenia F_T. Zrýchlenie postupného pohybu

$$a = \frac{1}{m}\left(m\,g\sin\varphi - F_T\right). \qquad (2)$$

Moment sily trenia roztáča guľôčku s uhlovým zrýchlením

$$\alpha = \frac{1}{I}F_T\,r\,. \qquad (3)$$

Pri valivom pohybe platí vzťah $a = r\,\alpha$ a súčasne podmienka statického trenia $F_T \le f\,F_N$, kde F_N je sila kolmá na povrch guľôčky v mieste dotyku s polguľou. Kolmá sila pozostáva zo zložky tiažovej sily $m\,g\cos\varphi$ a odstredivej sily pri pohybe ťažiska po kružnici

$$F_N = m\,g\cos\varphi - m\frac{v^2}{R+r} = \frac{17}{7}mg\left[\cos\varphi - \frac{10}{17}\right].$$

Z rovníc (2) a (3) určíme silu trenia za predpokladu valivého pohybu

$$F_T = \frac{m\,g\sin\varphi}{1+\dfrac{mr^2}{I}} = \frac{2}{7}m\,g\sin\varphi\,.$$

Pre hraničnú podmienku statického trenia $F_T = f\,F_N$ dostaneme rovnicu

$$\frac{10}{7} = \frac{17}{7}\cos\varphi_1 - \frac{2}{7}\,\frac{1}{f}\sin\varphi_1\,.$$

Vzhľadom na úlohu určiť rýchlosť v_1 je výhodné vyjadriť funkciu $\sin\varphi_1$ pomocou funkcie $\cos\varphi_1$

$$\sqrt{1-\cos^2\varphi_1} = \frac{17}{2}f\left(\cos\varphi_1 - \frac{10}{17}\right). \qquad (4)$$

po umocnení na druhú a úprave máme kvadratickú rovnicu pre $\cos\varphi_1$

$$\cos^2\varphi_1 - 2\frac{10\times 17 f^2}{4+17^2 f^2}\cos\varphi_1 - \frac{4-10^2 f^2}{4+17^2 f^2} = 0,$$

ktorá má riešenie

$$\cos\varphi_1 = \frac{10\times 17 f^2}{4+17^2 f^2} \pm \sqrt{\left(\frac{10\times 17 f^2}{4+17^2 f^2}\right)^2 + \frac{4-10^2 f^2}{4+17^2 f^2}}$$

a po úprave

$$\cos\varphi_1 = \frac{10}{17}\,\frac{(17f)^2}{4+(17f)^2}\left\{1+\sqrt{1+\left[\left(\frac{2}{10f}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{2}{17f}\right)^2+1\right]}\right\}. \qquad (5)$$

Rýchlosť pohybu ťažiska je podľa vzťahu (1)

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\varphi_1)}.$$

Pre dané hodnoty $\cos\varphi_1 \approx 0{,}911$, $\varphi_1 \approx 24{,}3°$, $v_1 \approx 0{,}51\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

c) Keďže medzný uhol valenia vždy existuje, je ľavá i pravá strana rovnice (4) nezáporná a tak máme podmienku

$$\cos\varphi_1 \geq \frac{10}{17}.$$

Medzný uhol prechodu do šmyku φ_{1m} = arccos (10/17) ≈ 54°.

Výsledok získame tiež ako limitu vzťahu (5) pre $f \to \infty$.

2. *Vodič v magnetickom poli*

Riešenie:

a) Bežec predstavuje teleso na naklonenej rovine. V smere rovnobežnom s naklonenou rovinou pôsobí na bežec smerom nadol sila $F_t = mg\sin\alpha$ a proti smeru pohybu sila trenia. Ak sa teleso nepohne, ide o trenie statické, ktorého medzná hodnota $F_{Tmax} = f F_N = f mg\cos\alpha$. Pre medzný stav sú obidve sily v rovnováhe $F_t = F_{Tmax}$, odkiaľ máme medzný uhol

$$\alpha_m = \operatorname{arctg} f.$$

Bežec sa začne pohybovať, ak $\alpha > \alpha_m$.

Pre $f = 0{,}15$ je $\alpha_m \approx 8{,}5°$. Ak je uhol sklonu $\alpha = 10°$, bežec sa začne po koľajničkách pohybovať smerom nadol.

b) Keď sa bežec pohybuje rýchlosťou v, indukuje sa v ňom napätie $u = Blv$. Toto napätie vyvolá v obvode prúd i. Pre napätie na induktore platí $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Ak prechádza obvodom (a teda aj bežcom) prúd i, pôsobí na bežec magnetická sila $F_{mag} = Bil$ proti smeru pohybu. Keď sa bežec pohybuje po koľajničkách, pôsobí proti smeru pohybu sila šmykového trenia $F_T = fmg\cos\alpha$. Pohybová rovnica má tvar

$$ma = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - Bil. \qquad (1)$$

Prúd vyjadríme pomocou rýchlosti pohybu porovnaním napätie na induktore a napätím indukovaným v bežci, pričom rýchlosť vyjadríme ako deriváciu posunutia $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

$$B\,l\,v = B\,l\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \text{ resp. } \frac{\mathrm{d}\left(B\,lx - L\,i\right)}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Ak je derivácia funkcie nulová, musí byť funkcia rovná konštante $B\,lx - L\,i = K$. Na začiatku je $x = 0$ a $i = 0$ a teda $K = 0$. Prúd v obvode je tak

$$i = (B\,l\,/\,L)\,x. \qquad (2)$$

Po dosadení výrazu (2) do rovnice (1) dostaneme

$$m\,a = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - \frac{B^2\,l^2}{L}\,x, \text{ resp. } \ddot{x} + \frac{B^2\,l^2}{m\,L}\,x = g\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right)$$

Riešením tejto rovnice je funkcia (pozri pomôcku 2)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) + C\,.$$

Ide o rovnicu pre súradnicu harmonického kmitavého pohybu

s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\dfrac{B^2\,l^2}{m\,L}} = \dfrac{B\,l}{\sqrt{mL}}$

a strednou polohou $C = \dfrac{mgL}{B^2\,l^2}\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right).$

Rýchlosť pohybu $v = \dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t + \alpha)\,.$

Na začiatku v čase $t = 0$ je posunutie $x = 0$ a rýchlosť $v = 0$:

$$A\sin\alpha + C = 0 \qquad \text{a} \qquad \omega A\cos\alpha = 0\,,$$

odkiaľ $\cos\alpha = 0$ a teda $\sin\alpha = \pm 1 \;\Rightarrow\; \alpha = -\pi/2,\ A = C.$

Posunutie zo začiatočnej polohy rýchlosť sú dané funkciami

$$x(t) = C\left(1 - \cos\omega t\right) \qquad v = \omega\,C\sin\omega t\,. \qquad (3)$$

Od začiatku pohybu do zastavenia vykoná bežec jednu polperiódu a zastane za čas

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi\sqrt{m\,L}}{B\,l}, \text{ pre dané hodnoty } T \approx 2{,}6 \text{ s.}$$

Za tento čas prejde dráhu rovnú dvojnásobku amplitúdy C

$$X = 2C = \frac{2\,mgL}{B^2\,l^2}\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right), \text{ pre dané hodnoty } X \approx 34 \text{ cm.}$$

c) Zo vzťahu (3) pre rýchlosť máme maximálnu hodnotu rýchlosti

$$v_{\mathrm{m}} = \omega C = \frac{\sqrt{mL}}{B\,l}\,g\,\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right), \text{ pre dané hodnoty } v_{\mathrm{m}} \approx 20{,}7 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

a čas, v ktorom ju bežec dosiahne (štvrťperióda)

$$t_1 = \frac{\pi}{2\,\omega} = \frac{\pi\sqrt{m\,L}}{2\,B\,l}, \text{ pre dané hodnoty } t_1 \approx 1{,}3 \text{ s.}$$

d) Podľa vzťahu (2) maximálny prúd zodpovedá maximálnej výchylke

$I_m = (B\,l\,/\,L)\,x_m = 2\,(B\,l\,/\,L)\,C = \dfrac{2mg}{Bl}\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right)$, pre dané hodnoty $I_m \approx 51$ mA.

Túto hodnotu dosiahne v čase zastavenia bežca $t_m = T$.

e) Teplo je rovné úbytku energie sústavy pri prechode zo začiatku do zastavenia

$$Q = -\Delta E_p - \frac{1}{2}L\,I_m^2 = m\,g\,X\sin\alpha - \frac{1}{2}L\,I_m^2 = 2L\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2 f\cos^2\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right),$$

pre dané hodnoty $Q \approx 14{,}7$ mJ.

f) Pre pohyb smerom nahor sa zmení smer sily trenia. Výsledná sila smerom nahor v polohe zastavenia, ak sa bežec pohne nahor,

$$F = B\,I_m\,l - m\,g\sin\alpha - f\,m\,g\cos\alpha > 0.$$

Podmienku pre uhol α možno vyjadriť nerovnicou

$$\sin\alpha + f\cos\alpha < \frac{B\,I_m\,l}{m\,g} = 2\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha - f\right) = 2\sin\alpha - 2\,f\cos\alpha$$

$\mathrm{tg}\alpha > 3f$, pre danú hodnotu $\alpha > 24°$.

Pri pohybe bežca nadol vzniká v obvode prúd, ktorý pôsobí smerom nahor. V okamihu zastavenia dosahuje maximálnu hodnotu a v induktore sa nahromadila energia $\frac{1}{2}L\,I_m^2$. Ak táto sila prekoná dotyčnicovú zložku tiažovej sily a sily trenia, pokračuje bežec v pohybe nazad nahor. Pri malom uhle $\alpha < \mathrm{arctg}\,3f$ je prúd I_m malý na to, aby spôsobil pohyb nazad.

3. *Fotón v gravitačnom poli IC*

Riešenie:

a) Fotón s energiou $E = h\,f$ má hmotnostný ekvivalent $m = E/c^2 = hf\,/\,c^2$. V gravitačnom poli sa správa ako častica s hmotnosťou m, a teda pri zmene výšky H sa mení jeho energia $\Delta E = mgH = h\,\Delta f$. Relatívna zmena frekvencie

$$\delta_g = \frac{\Delta f}{f} = \frac{gH}{c^2},$$ pre dané hodnoty $\delta_g \approx 2{,}2\times10^{-15}$.

Tento relatívny rozdiel frekvencie je súčasnými metódami merateľný.

b) Teplotné rozšírenie spektrálnej čiary je spôsobené Dopplerovým javom, ktorý sa prejavuje u pohybujúcich sa zdrojov žiarenia.

Tepelný pohyb možno charakterizovať strednou kvadratickou rýchlosťou, ktorá pre nezávisle kmitajúci atóm vychádza z rovnosti energie kmitajúceho atómu $\frac{1}{2}mv^2$ a strednej tepelnej energie oscilátora $3k_BT$, kde k_B je Boltzmannova konštanta (na každý kvadratický člen v celkovej energii oscilátora – 3 kinetické a 3 potenciálne, pripadá stredná energia $\frac{1}{2}k_BT$)

$$v = \sqrt{\frac{6\,k_BT}{m}},$$ pre dané hodnoty $v \approx 512\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Keďže ide o malú rýchlosť $v \ll c$, možno použiť klasický vzťah pre Dopplerov jav pre pohybujúci sa zdroj

$$f = f_0 \frac{1}{1 \pm v/c} \approx f_0 \left(1 \mp \frac{v}{c}\right).$$

Relatívna zmena frekvencie

$$\frac{\Delta f}{f_0} \approx \mp \frac{v}{c}.$$

Keďže je smer pohybu atómov v mriežke náhodný, vyskytnú sa v spektre odchýlky od záporných po kladné a relatívna šírka spektrálnej čiary

$$\delta_\mathrm{T} \approx \frac{2v}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{6 k_\mathrm{B} T}{m}}$$, pre dané hodnoty $\delta_\mathrm{T} \approx 3{,}4 \times 10^{-6}$.

Ako vidno, tepelné rozšírenie spektrálnej čiary je príliš veľké, aby sa dal pozorovať gravitačný posun frekvencie.

c) Ak je fotón emitovaný z jadra jednotlivého atómu, prenáša sa pri emisii hybnosť a časť *energie* na jadro.

$$E_0 = \frac{1}{2} m_\mathrm{J} v_\mathrm{J}^2 + E_\mathrm{f} \qquad\qquad m_\mathrm{J} v_\mathrm{J} = p_\mathrm{f}$$

Po vylúčení rýchlosti jadra máme

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{p_\mathrm{f}^2}{m_\mathrm{J}} + E_\mathrm{f} = \frac{h^2 f^2}{2 m_\mathrm{J} c^2} + h f .$$

Ide o kvadratickú rovnicu

$$f^2 + 2\frac{m_\mathrm{J} c^2}{h} f - \frac{2 m_\mathrm{J} c^2}{h} f_0 = 0$$, kde $f_0 = E_0/h$,

a jej riešenie

$$f = -\frac{m_\mathrm{J} c^2}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{m_\mathrm{J} c^2}{h}\right)^2 + \frac{2 m_\mathrm{J} c^2}{h} f_0} = \frac{m_\mathrm{J} c^2}{h}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 h f_0}{m_\mathrm{J} c^2}}\right).$$

Fyzikálny význam má iba znamienko + (kladný výsledok). Keďže $E_0 << m_\mathrm{J} c^2$, možno odmocninu rozvinúť do mocninového výrazu (pomôcka v zadaní)

$$f = \frac{m_\mathrm{J} c^2}{h}\left(-1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{2 h f_0}{m_\mathrm{J} c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2 h f_0}{m_\mathrm{J} c^2}\right)^2\right) = f_0\left(1 - \frac{E_0}{2 m_\mathrm{J} c^2}\right).$$

Pozn.: Náhrada odmocniny len lineárnym výrazom by neukázala odchýlku, dostali by sme $f = f_0$. *Preto treba použiť náhradu kvadratickým priblížením.*

Relatívna zmena frekvencie spôsobená mechanickým rázom

$$\delta_\mathrm{m} = -\frac{E_0}{2 m_\mathrm{J} c^2}$$, pre dané hodnoty $\delta_\mathrm{m} \approx 1{,}4 \times 10^{-7}$.

Táto odchýlka o mnoho rádov prekračuje hodnotu gravitačného posunutia.

d) Ak v dôsledku tesnej väzby nevystupujú jednotlivé atómy ako samostatné oscilátory, ale vzorka sa správa ako jedna častica, zostávajú tvary odvodených vzťahov rovnaké, len hmotnosť jednotlivého atómu m_J sa nahradí hmotnosťou vzorky m. Pri použití odvodených vzťahov relatívne zmeny frekvencie sú $\delta_\mathrm{T} \approx 3{,}3 \times 10^{-17}$ a $\delta_\mathrm{m} \approx 1{,}3 \times 10^{-29}$. tieto odchýlky sú o niekoľko rádov menšie ako je relatívne gravitačné posunutie, a preto využitie Mössbauerovho javu umožňuje gravitačné posunutie frekvencie merať.

4. Zaostrenie lúča

Riešenie:

a) Na obrázku A−2 sú znázornené okrajové lúče laserového zväzku. K zaostreniu zväzku dochádza v bode, v ktorom majú všetky lúče zväzku rovnakú fázu, resp. majú rovnakú optickú dráhu. Máme dokázať, že taký bod F existuje.

Uvažujme lúč, ktorý dopadá na platničku vo vzdialenosti r od jej stredu. Optická dráha je daná súčinom indexu lomu a geometrickej dráhy. Kolmý prechod platničkou predstavuje optickú dráhu nh a potom optická dráha do bodu F je $\sqrt{f^2+r^2}$ (uvažujeme index lomu vzduchu n_0 = 1). Celková optická dráha od roviny dopadu lúča na platničku

$$l_{\mathrm{opt}}(r) = n(r)h + \sqrt{f^2+r^2} = n(r)h + f\sqrt{1+\left(\frac{r}{f}\right)^2}\ .$$

Táto optická dráha musí byť rovnaká ako optická dráha osového lúča

$$l_{\mathrm{opt}}(0) = n(0)h + f\ .$$

Podmienka zaostrenia je rovnosť obidvoch optických dráh. Odtiaľ máme rovnicu pre závislosť indexu lomu od vzdialenosti r od stredu platničky

$$n(r) = n(0) - \frac{f}{h}\left[\sqrt{1+\left(\frac{r}{f}\right)^2} - 1\right]\ .$$

Vzťah upravíme pre $r/f << 1$

$$n(r) \approx n(0) - \frac{f}{h}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{f}\right)^2 - 1\right] = n_1\left(1 - \frac{1}{2fhn_1}r^2\right).$$

Z výsledku vidno, že platnička zaostruje zväzok do ohniska ako spojná šošovka, ak index lomu klesá s druhou mocninou vzdialenosti r od osi, pričom koeficient

$$\alpha = -\frac{1}{2fhn_1}\ .$$

b) Pre dané hodnoty $\alpha \approx -1{,}7\times10^3\ \mathrm{m}^{-2}$.

Relatívna zmena indexu lomu

$$\delta = \frac{n(d)-n(0)}{n(0)} = -\frac{1}{8fhn_1}d^2$$, pre dané hodnoty $\delta \approx -4{,}2$ %.

5. *Atóm hélia*

Riešenie:

a) V základnom stave sa nachádzajú obidva elektróny v rovnakom stave, líšia sa iba opačne orientovaným spinom. Podľa modelu Bohrovho typu obiehajú elektróny okolo jadra po spoločnej kružnici s polomerom r v opozícii (v dôsledku vzájomnej odpudivosti v najväčšej vzdialenosť $2r$).

Podmienka rovnováhy síl pôsobiacich na elektrón

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{k\,2e^2}{r^2} - \frac{k\,e^2}{(2\,r)^2} = \frac{7}{4}\frac{k\,e^2}{r^2}. \qquad (1)$$

Kvantová podmienka podľa Bohrovho modelu (moment hybnosti elektrónu je celistvým násobkom $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}05\times10^{-34}$ J·s – modifikovaná Planckova konštanta). V základnom stave

$$m\,v\,r = \hbar. \qquad (2)$$

Z obidvoch rovníc určíme polomer dráhy

$$r_1 = \frac{4}{7}\frac{\hbar^2}{k\,e^2 m}, \qquad (3)$$

pre dané hodnoty $r_1 \approx$ 30,2 pm.

b) Energie dvojice elektrónov je súčtom kinetickej energie, potenciálnej energie dvojice elektrónov v poli jadra a vzájomnej potenciálnej energie dvojice elektrónov

$$E_1 = 2\times\frac{1}{2}m\,v^2 - 2\times k\frac{2\,e^2}{r_1} + k\frac{e^2}{2\,r_1}.$$

S použitím (2) a (3)

$$E_1 = -\frac{7}{4}\frac{k\,e^2}{r_1}, \qquad (4)$$

pre dané hodnoty $E_1 \approx -\,1{,}34\times10^{-17}$ J $\approx -\,83{,}4$ eV.

c) Ión He^+ má v elektrónovom obale jeden elektrón. Z rovnosti dostredivej a odstredivej sily pôsobiacich na elektrón máme

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{2\,k\,e^2}{r^2}. \qquad (5)$$

Kvantová podmienka pre základný stav je daná vzťahom (2). Polomer stacionárnej dráhy je potom

$r_1^+ = \dfrac{\hbar^2}{2\,m\,k\,e^2}$, pre dané hodnoty $r_1^+ \approx 26{,}3$ pm.

Energia elektrónu v základnom stave

$$E_1^+ = \frac{1}{2}m\,v^2 - k\frac{2\,e^2}{r_1^+} = -k\frac{e^2}{r_1^+},$$

pre dané hodnoty $E_1^+ \approx -\,8{,}76\times10^{-18}$ J $\approx -\,54{,}8$ eV.

d) Rozdiel energie neutrálneho atómu a jednomocného iónu predstavuje ionizačnú energiu prvej ionizácie (uvoľnenie jedného elektrónu)

$\Delta E_1 = E_1^+ - E_1$, pre dané hodnoty $\Delta E_1 \approx 28{,}6$ eV.

Molárna ionizačná energia

$E_1^* = \Delta E_1 \; N_A$, pre dané hodnoty $E_1^* \approx 2\,746$ kJ·mol^{-1}.

e) Ionizačná energia jednomocného iónu

$\Delta E_2 = -E_1^+$

Molárna ionizačná energia druhej ionizácie

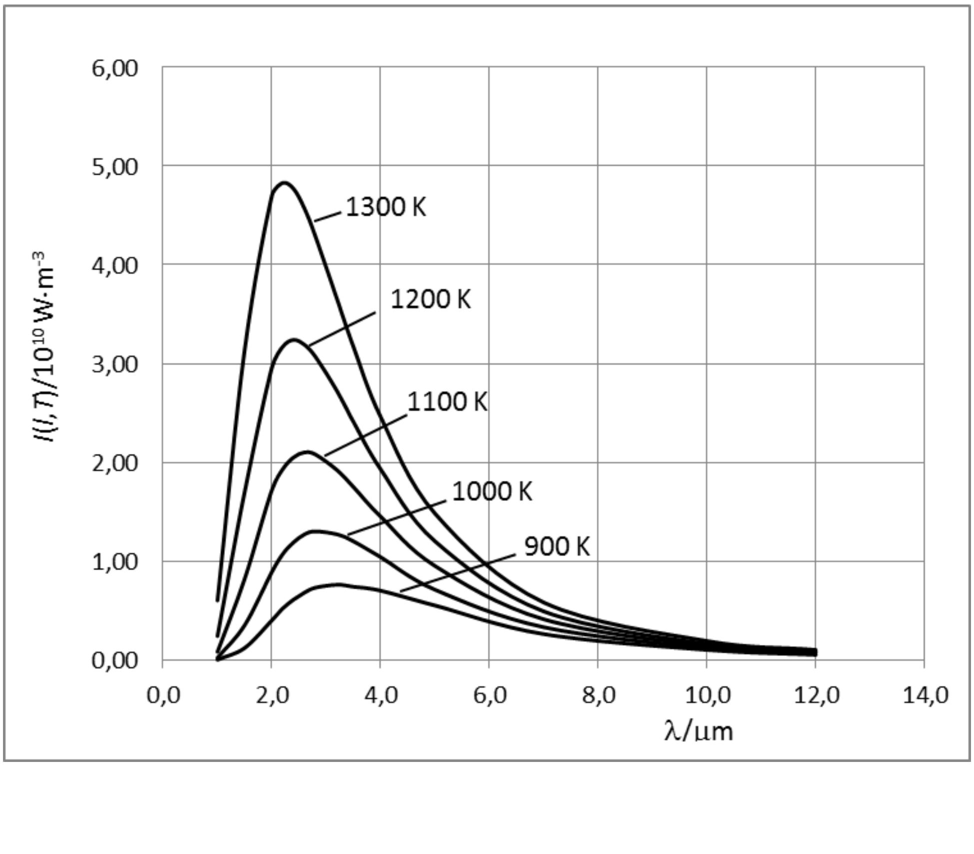
$E_2^* = \Delta E_2 \; N_A$, pre dané hodnoty $E_2^* \approx 5\,261$ kJ·mol^{-1}.

f) Z výsledkov vidno, že presnejší výsledok sa dostane pre ionizáciu, resp. energiu, jednomocného iónu, ktorý predstavuje jednoduchú sústavu podobnú vodíku. Pre opis dvojelektrónového atómu je bohrovská predstava menej presná najmä pre opis vzájomného pôsobenia dvojice elektrónov. Napriek tomu dáva použitý model pomerne dobrý odhad ionizačnej energie.

6. *Tepelné vyžarovanie telesa*

Riešenie:

a) Graf 1 závislosti spektrálnej hustoty intenzity žiarenia podľa tabuľky výsledkov merania



b) Určenie vlnovej dĺžky pre maximum spektrálnej hustoty pre jednotlivé teploty

T/K	1300	1200	1100	1000	900
λ_m/μm	2,2	2,4	2,6	2,8	3,3

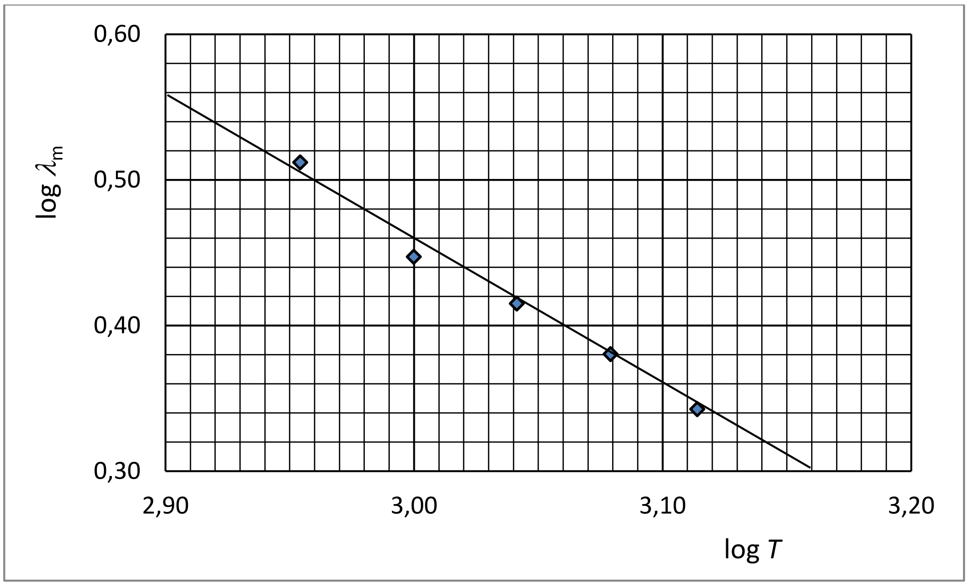
Na overenie vzťahu a určenie hodnôt a a b transformujeme závislosť na lineárnu logaritmovaním vzťahu

$$\log \lambda_m = \log a + b \log T .$$

Rovnicu vyjadríme v tvare

$y = A + b\,x$, kde $y = \log \lambda_m$, $A = \log a$, $x = \log T$.

Zostrojíme graf 2 podľa tabuľky a optimálnu priamku



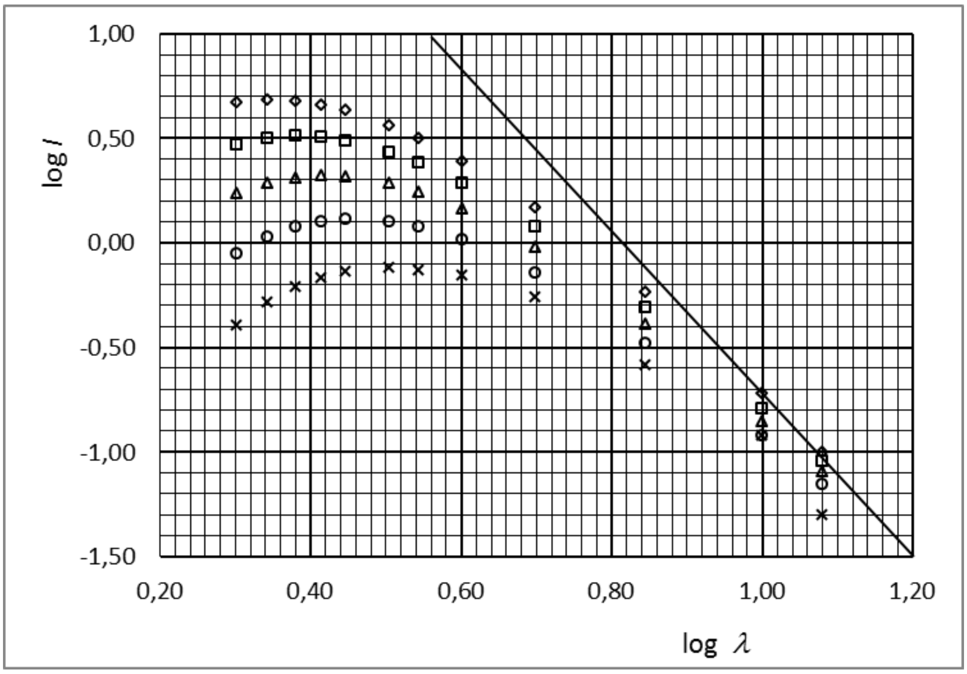
Smernica $b = \Delta(\log\lambda_m)/\Delta(\log T) \approx -\,0{,}26/0{,}26 = -1{,}00$

$A = y + x \approx 0{,}56 + 2{,}90 = 3{,}46$ a teda $a = 10^A \approx 2{,}88\times10^3$ μm·K = $2{,}88\times10^{-3}$ m·K.

c) Na určenie jednotlivých exponentov je opäť výhodné logaritmovať závislosť

$$\log I = \log A + m \log T + n \log \lambda.$$

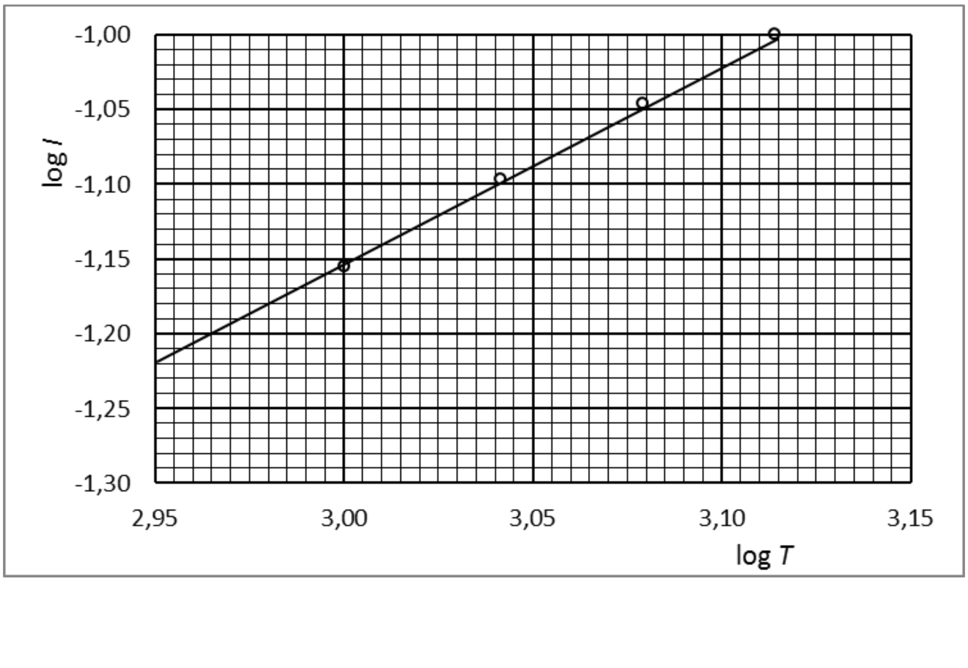
Pre overenie mocninovej závislosti od λ zostrojíme graf 3 pre $y = \log I$ a $x = \log \lambda$ pre jednotlivé teploty



Z grafu vidno, že k lineárnemu priebehu sa grafy blížia pri vlnových dĺžkach $\lambda >> \lambda_m$. Pre presné určenie smernice *n* nie sú k dispozícii namerané hodnoty pre veľké vlnové dĺžky. Z údajov, ktoré sú k dispozícii vidno, že pre väčšie vlnové dĺžky sa grafy približujú k priamočiaremu poklesu – v grafe je znázornená odhadovaná priamka. Z grafu odhadnutá smernica je $n \approx (-1{,}50-1{,}00)/(1{,}20-0{,}56) \approx -3{,}9$. Keďže hodnoty pri najväčšej vlnovej dĺžke sú určené iba na jednu platnú číslicu, zaokrúhlime výsledok na hodnotu $n = -4$

Určenie exponentu *m* z uvedeného grafu je veľmi nepresné (krivky sú veľmi blízke).

Keďže náhrada uvedenou mocninovou závislosťou je vhodná iba v oblasti veľkých vlnových dĺžok, použijeme pri zostrojení nasledujúceho grafu 4 údaje pre $\lambda = 12$ m.



Z grafu vidno, že body z nameraných hodnôt ležia na priamke. Z grafu určíme smernicu priamky $m \approx 1{,}3$ a s ohľadom na presnosť nameraných hodnôt na jednu platnú číslicu zaokrúhlime výsledok na $m = 1$

Získaná mocninová závislosť má tvar

$$I = A\frac{T}{\lambda^4}\,.$$

Ak použijeme údaje z tabuľky nameraných hodnôt pre $\lambda = 12$ μm, dostaneme napr. pre teplotu 1 000 K číselnú hodnotu $A \approx 2\times10^{-14}$ W·m·K^{-1} .

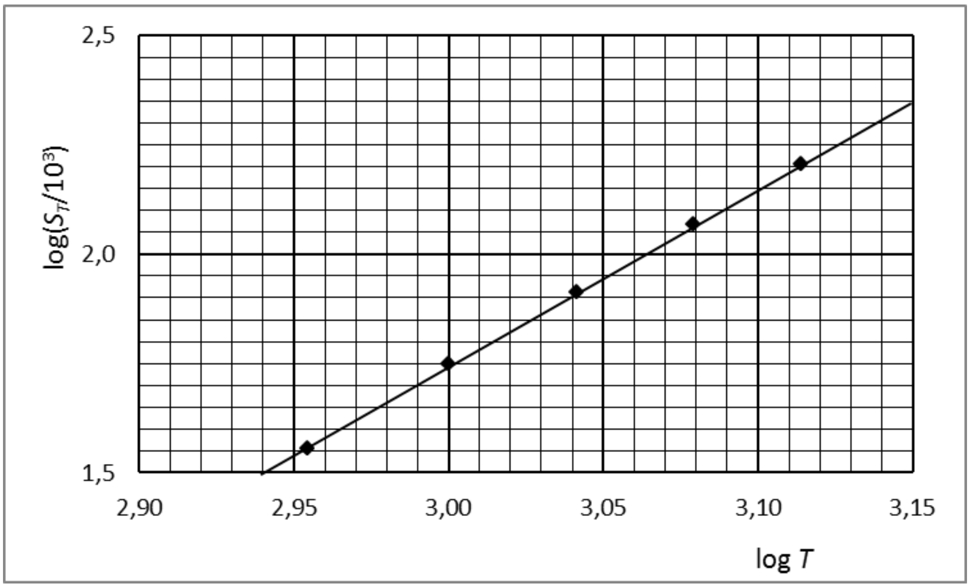
d) Na numerickú integráciu použijeme lichobežníkovú metódu. Vzhľadom na značný počet operácií je vhodné použiť počítač (v tomto riešení je použitý MS EXCEL). Elementárny príspevok k integrálu za daný interval $\Delta\lambda$ je $(1/2)(I_i + I_{i+1})/(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$. Určíme súčet príspevkov pre danú teplotu na intervale hodnôt v tabuľke. Presne by mal byť súčet na intervale $(0, \infty)$. Ako vidno z grafu 1, príspevky mimo interval merania sú veľmi malé a možno ich zanedbať. Výsledky numerických integrálnych súčtov sú v nasledujúcej tabuľke

T/K	1300	1200	1100	1000	900
$S_T/10^7$ W·m^{-2}	161	116	82	56	36

I v tomto prípade závislosť linearizujeme logaritmickou transformáciou premenných

$$\log S_T = \log s + r\log T\,.$$

Výsledky znázorníme v grafe 5



Ako vidno, body určené z nameraných hodnôt ležia na priamke. Z grafu určíme smernicu priamky $r = (2{,}35–1{,}50)/(3{,}15–2{,}94) \approx 4{,}0$.

Z priamky určíme hodnotu $\log s \approx (2{,}35 + 3) - 4\times3{,}15 = -7{,}25$, a teda

$s = 10^{-7{,}25} \approx 5{,}6\times10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4} .

e) V časti b) sa overil Wienov posuvný zákon $\lambda_\mathrm{m} = b\,/\,T$, kde $b = 2{,}89\times10^{-3}$ m·K, čo je v dobrej zhode s numerickou analýzou.

V časti c) sa overoval Rayleigh–Jeansov zákon

$$I = A\frac{T}{\lambda^4}, \text{ kde } A = 2\pi c k_B \approx 2{,}6\times10^{-14}\ \text{W·m·K}^{-1},$$

ktorý predstavuje limitný tvar Planckovho zákona pre veľké vlnové dĺžky $\lambda >> \lambda_m$. Numerická analýza nameraných hodnôt dáva pomerne dobrú zhodu.

V časti d) ide o Stefan–Boltzmannov zákon $I = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5{,}67\times10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}. Získané výsledky numerickej analýzy sú v zhode s týmto zákonom.

7. *Experimentálna úloha: Štúdium elektrických vlastností superkondenzátora*

Riešenie:

Superkondenzátor je použitý preto, lebo nabíjací, resp. vybíjací dej s časovou konštantou $\tau = R\,C$ je dostatočne pomalý, aby sa dal sledovať bez použitia esciloskopu. Pri kapacite $C \approx 0{,}5$ F a odpore $R \approx 100\ \Omega$ je $\tau \approx 50$ s. Proces možno sledovať pomocou bežného multimetra a stopiek. Podľa vzťahu (1) za čas τ poklesne hodnota napätia na $1/\mathrm{e} \approx 37$ % začiatočnej hodnoty, za čas 2τ na $1/\mathrm{e}^2 \approx 14$ %, atď.

a) Pri vybíjaní je napätie na rezistore a na kapacitore rovnaké, $u_C = u_R$. Napätie $u_R = R\,i$, prúd kondenzátora $i = C\,\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$. Pre u_C tak dostávame diferenciálnu rovnicu

$$u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},$$

ktorej vyhovuje funkcia (1) uvedená v zadaní – o čom sa možno presvedčiť priamym dosadením.

Pozn.: Diferenciálna rovnica sa všeobecne rieši tak, že sa na základe kvalifikovaného odhadu predpokladá tvar funkcie, ktorá by mohla byť riešením rovnice, a potom sa priamym dosadením zistí, či bol predpoklad správny.

V našom konkrétnom prípade možno rovnicu riešiť priamou integráciou (to ale všeobecne nie je možné v prípade zložitejších rovníc a rovníc vyšších rádov)

$$\frac{1}{RC}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u_C}{u_C}, \text{ resp. } \frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{u_{C0}}^{u_C}\frac{\mathrm{d}u_C}{u_C} = \ln\frac{u_C}{u_{C0}},$$

odkiaľ dostaneme vzťah (1)

$$u_C = u_{C0}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Potobne prúd kondenzátora

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Pri nabíjaní je priebeh prúdu rovnaký, ale napätie, na rozdiel od vybíjania, rastie k výslednej hodnote

$$u_C = U_0 - U_0\, e^{-\frac{t}{RC}} = U_0\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,.$$

b) Po ustálení prúdu je prúd cez kapacitor nulový a teda prúd ampérmetra je $i_b = U / (R_p + R_s + R_A)$. Keďže $R_p >> R_s + R_A$, platí $i_b \approx U / R_p$.

c) Schéma obvodu

d) Pri $R_V >> R_p$ sa vybíja kondenzátor cez vlastný paralelný odpor R_p. Po postupnom meraní napätia a času sa získajú hodnotu pre graf. Z grafu možno napr. určiť čas t_{50} poklesu napätia na 50% začiatočnej hodnoty a určiť kapacitu kondenzátora

$$C = \frac{t_{50}}{R_p \ln 2}\,.$$

Presnejšia metóda spočíva v zostrojení grafu, v ktorom sa na osi nezávisle premennej vynáša čas t a na druhej osi ln (u_C/u_{C0}). Priebeh sa zobrazí ako priamka so smernicou $k = -1/RC$. Pre preložení optimálnej priamky nameranými bodmi a určením smernice k z grafu sa určí kapacita C.

e) Schéma obvodu

f) Pri vybíjaní kondenzátora cez rezistor s odporom $R_s + R_A << R_p$ je samovybíjanie zanedbateľné. Z priebehu napätia na kondenzátore sa určí rovnako ako v bode d) časová konštanta k_2 a z nej odpor $R_s + R_A$ a po odpočítaní odporu meracieho prístroja hodnotu R_s.

g) Schéma obvodu.

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie A*

Autori úloh:	Ľubomír Konrád (1, 4), Ľubomír Mucha (5), Ivo Čáp (2, 3, 6, 7)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014