56. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2014/2015

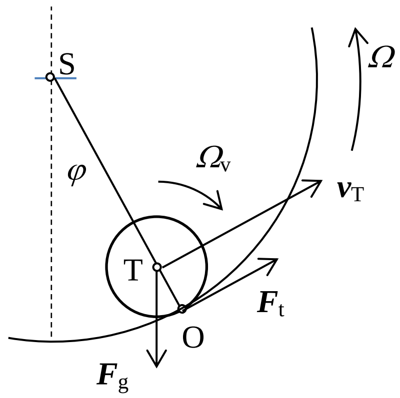
Kategória B – domáce kolo

riešenie úloh

1. *Valec vo valci*

Riešenie:

a) Ak sa valček, ktorý sa neotáča, dostane do kontaktu s pohybujúcim sa povrchom valca, začne naň pôsobiť sila šmykového trenia $\boldsymbol{F}_t$, ktorá ho uvedie do postupného pohybu po povrchu valca a zároveň ho roztáča. Keď dosiahne obvodová rýchlosť povrchu valčeka vzhľadom na jeho os otáčania hodnotu rýchlosti pohybu vnútorného povrchu valca, stane sa pohyb valivý a trenie sa zmení na statické. Práca statického trenia je nulová a tak ďalší pohyb valčeka určuje iba sila tiažová.



Obr. RB–1

Rotačný pohyb valčeka opíšeme pohybovou rovnicou otáčania vzhľadom na os O danú priamkou kontaktu s vnútorným povrchom valca. Na valček pôsobí iba moment tiažovej sily (moment sily $\boldsymbol{F}_t$ statického trenia vzhľadom na os O je nulový – nulové rameno)

$$\left(I_0 + mr^2\right)\alpha_v = -\,r\,m\,g\sin\varphi ,$$

kde α_v je uhlové zrýchlenie valčeka vzhľadom na jeho os otáčania.

Rýchlosť pohybu bodu O na povrchu valca je ΩR. Uhlovú rýchlosť valčeka vzhľadom na jeho os otáčania označíme Ω_v. Rýchlosť pohybu bodu T je potom

$$v_T = R\Omega + r\,\Omega_v \qquad \text{a} \qquad \text{zároveň} \qquad v_T = \left(R-r\right)\dot{\varphi} ,$$

kde $\dot{\varphi}$ je uhlová rýchlosť sprievodiča SO.

Ak rovnicu $\quad R\Omega + r\,\Omega_v = \left(R-r\right)\dot{\varphi}$

derivujeme podľa času (pritom Ω je konštantná), dostaneme

$$r\,\dot{\Omega}_v = \left(R-r\right)\ddot{\varphi}, \text{ resp. } \qquad r\,\alpha_v = \left(R-r\right)\alpha ,$$

kde α je uhlové zrýchlenie sprievodiča a α_v uhlové zrýchlenie valčeka vzhľadom na jeho os rotácie.

Po dosadení do pohybovej rovnice máme

$$\left(I_0 + mr^2\right)\left(R-r\right)\alpha = -\,r^2\,m\,g\sin\varphi$$

a s použitím vzťahu $I_0 = (1/2)\,m\,r^2$ pre moment zotrvačnosti valca vzhľadom na jeho os

$$\alpha = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\varphi .$$

Pre malé uhly φ vychýlenia z rovnovážnej polohy je $\sin\varphi \approx \varphi$ a pohybová rovnica má tvar

$$\alpha = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\varphi .$$ Správne slovné zdôvodnenie **3 body**

Správne matematické zdôvodnenie **3 body**

b) Rovnica $\alpha = -k\,\varphi$, kde uhlové zrýchlenie $\alpha = \ddot{\varphi}$ (druhá derivácia uhlovej výchylky φ), predstavuje rovnicu harmonických kmitov okolo rovnovážnej polohy $\varphi = 0$.
Rovnovážna poloha je najnižšia poloha valčeka vo valci. **2 body**

c) Konštanta k predstavuje druhú mocninu uhlovej frekvencie kmitov $k = \omega^2$ a teda

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} .$$ **2 body**

2. *Chladiaci stroj*

Riešenie:

a) Carnotov cyklus pozostáva z dvoch dejov izotermických a dvoch adiabatických. K tepelnej výmene medzi sústavou a okolím dochádza iba pri termodynamických dejoch, pri adiabatických k výmene tepla nedochádza. Ak dochádza k expanzii pri vyššej teplote, sústava prijíma teplo z ohrievača a pri izotermickom deji pri nižšej teplote teplo odovzdáva chladiču. Rozdiel tepla dodaného a odovzdaného predstavuje prácu, ktorú sústava vykoná behom jedného cyklu – ide o *tepelný motor*.

Ak cyklus prebieha opačne, tzn. teplo sa sústave dodáva (izotermická expanzia) pri nižšej teplote a odoberá sa (izotermická kompresia) pri vyššej teplote, dochádza k prenosu energie z chladnejšieho prostredia do teplejšieho a to sa nazýva *tepelné čerpadlo*. Rozdiel tepla prijatého a odovzdaného predstavuje prácu, ktorú treba vykonať počas cyklu, napr. elektrický pohon kompresora. **2 body**

b) Úloha vyžaduje výpočet tepla počas izotermického deja. Existuje niekoľko možností:

Ak vieme, že účinnosť Carnotovho cyklu (tepelného motora)

$$\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\text{, určíme požadovaný pomer } \eta = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} .$$

Je to ale bez odvodenia východiskového vzťahu.

Ak vieme, že teplo počas izotermického deja

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\mathrm{d}V = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{a} \quad Q_2 = \int_{V_3}^{V_4} p\,\mathrm{d}V = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

a z dvojice adiabatických dejov máme

$$\frac{V_4}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\kappa-1)}, \ \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\kappa-1)} \text{ a teda } \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_2}{V_1} \text{ a po dosadení } \eta = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} .$$

Ak vieme, že pri vratnom deji (Carnotov dej je vratný) sa izotermicky dodané (odobrané) teplo prejaví zmenou entropie $\Delta S = (1/T)\,Q$ a pri adiabatickom deji $\Delta S = 0$, je pri obidvoch izotermických dejoch veľkosť zmeny entropie ΔS rovnaká, a teda

$Q_1 = T_1\,\Delta S$ a $Q_2 = T_2\,\Delta S$, a teda $\eta = \dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$.

Vo vzťahoch vystupuje termodynamická teplota (v jednotkách kelvin)

Pre dané hodnoty $\eta \approx 1{,}37$. **3 body**

c) Práca potrebná na pohon čerpadla v jednom cykle

$$W = Q_2 - Q_1 = Q_2 = Q_2\left(1 - \frac{Q_1}{Q_2}\right) = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right).$$

Tento vzťah určuje pomer medzi celkovou prácou a dodaným teplom. Pre výkon máme

$$P = \frac{W_{\text{celk}}}{\tau} = \frac{Q_{2\,\text{celk}}}{\tau}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right).$$

Teplo sa využije na ohrev vody a premenu na paru $Q_{2\,\text{celk}} = m_{\text{P}}\, l_{\text{v}}$.

Výkon čerpadla je

$$P = \frac{m_{\text{P}}\, l_{\text{v}}}{\tau}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right),$$

pre dané hodnoty a $l_{\text{v}} = 2{,}26\ \text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ máme $P \approx 17{,}0\ \text{kW}$ **3 body**

d) Zo zásobníka sa odoberie v jednom cykle teplo $Q_1 = Q_2/\eta$. Na dodanie tepla $Q_{2\,\text{celk}}$ odoberieme zo studenej vody teplo $Q_{1\,\text{celk}} = m_{\text{L}}\, l_{\text{t}}$. Hmotnosť vytvoreného ľadu

$$m_{\text{L}} = m_{\text{P}} \frac{l_{\text{v}}}{\eta\, l_{\text{t}}},$$

pre dané hodnoty a $l_{\text{t}} = 332\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ máme $m_{\text{L}} \approx 497$ kg. **2 body**

3. *Nabitá guľôčka v magnetickom poli*

Riešenie:

a) Na guľôčku pôsobí magnetická sila, ktorá má v každej polohe smer odstredivý a veľkosť $F_{\text{m}} = q\,v\,B$. Táto sila koná nulovú prácu, keďže pôsobí kolmo na smer pohybu, a preto sa neprejaví na energetickej bilancii deja.

Zo zákona zachovania mechanickej energie máme pre polohy A a B, obr. B–2,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g\, 2l\,. \qquad (1)$$ **2 body**

Ak sa má guľôčka pohybovať po kružnici (pri napnutom vlákne), musí byť výsledná odstredivá sila nezáporná. Kritický je bod B

$$m\frac{v^2}{l} - m g + q v B \geq 0\,. \qquad (2)$$ **2 body**

Minimálna podmienka je daná kvadratickou rovnosťou (2) s riešením

$$v = -\frac{qBl}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{qBl}{2m}\right)^2 + gl} \quad . \qquad (3)$$

Z výrazu (1) máme

$$v_0^2 = v^2 + 4g\ l$$

a po dosadení z (3)

$$v_{0\min}^2 = 5gl + \frac{1}{2}\left(\frac{qBl}{m}\right)^2 - 2\frac{qBl}{2m}\sqrt{\left(\frac{qBl}{2m}\right)^2 + gl}\ .$$ **3 body**

b) Magnetická sila pri opačnom smere indukčných čiar pôsobí dostredivo. V nerovnici (2) sa zmení znamienko tretieho člena

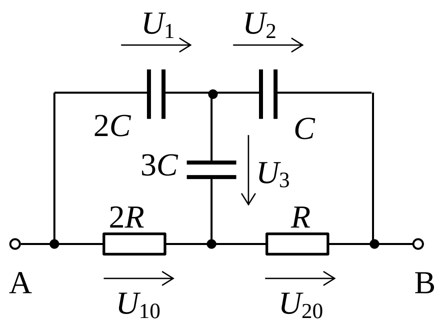
$$v_{0\min}^2 = 5gl + \frac{1}{2}\left(\frac{qBl}{m}\right)^2 + 2\frac{qBl}{2m}\sqrt{\left(\frac{qBl}{2m}\right)^2 + gl}\ .$$ **3 body**

4. *Elektrický obvod s kondenzátormi*

Riešenie:

a) V ustálenom stave prechádza kondenzátormi nulový prúd a rezistory predstavujú nezaťažený delič napätia, obr. RB–3.

$$U_{10} = \frac{2U_0}{3} \qquad U_{20} = \frac{U_0}{3}.$$



Obr. RB–3

Pre napätia na kondenzátoroch platia rovnice

$$U_1 + U_2 = U_0$$

$$U_1 + U_3 = U_{10}$$

a po dosadení nábojov

$$\frac{Q_1}{2C} + \frac{Q_2}{C} = U_0 \qquad (1)$$

a $$\frac{Q_1}{2C} + \frac{Q_3}{3C} = \frac{2U_0}{3} \qquad (2)$$

Pre náboje na kondenzátoroch máme

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0. \quad (3)$$

Zo sústavy výrazov (1), (2) a (3) dostaneme

$$Q_1 = CU_0, \qquad Q_2 = \frac{1}{2}CU_0, \qquad Q_3 = \frac{1}{2}CU_0$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{2C} = \frac{U_0}{2}, \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{U_0}{2}, \qquad U_3 = \frac{Q_3}{3C} = \frac{U_0}{6}.$$ **5 bodov**

b) Ak sa preruší rezistor s odporom R_1, prechádza druhým rezistorom v ustálenom stave nulový prúd a preto je na ňom nulové napätie. Rezistor možno nahradiť skratom a kondenzátory C_2 a C_3 sa tak spoja paralelne a predstavujú kondenzátor s kapacitou $C_{23} = 4C$. Pre náboje platí $Q_1' = Q_{23}'$ a pre napätia $\dfrac{Q_1'}{2C} + \dfrac{Q_{23}'}{4C} = U_0$.

Odtiaľ dostaneme

$$Q_1' = \frac{4}{3}CU_0\,,\ U_1' = \frac{Q_1'}{2C} = \frac{2}{3}U_0\,,\ U_2' = U_3' = \frac{1}{3}U_0\,,$$

$$Q_2' = CU_2' = \frac{1}{3}CU_0 \text{ a } Q_3' = 3CU_3' = CU_0\,.$$

Zmeny hodnôt nábojov a napätí sú

$$\Delta Q_1 = Q_1' - Q_1 = \frac{1}{3}CU_0\,, \qquad \Delta Q_2 = Q_2' - Q_2 = -\frac{1}{6}CU_0\,, \quad \Delta Q_3 = Q_3' - Q_3 = \frac{1}{2}CU_0$$

$$\Delta U_1 = U_1' - U_1 = \frac{1}{6}U_0\,, \qquad \Delta U_2 = U_2' - U_2 = -\frac{1}{6}U_0\,, \quad \Delta U_3 = U_3' - U_3 = \frac{1}{6}U_0\,.$$

5 bodov

5. *Statická rovnováha*

Riešenie:

a) Začiatočné predĺženie gumičky určíme z podmienky momentovej rovnováhy vzhľadom na bod O

$$k\left(b_0 - l_0\right)a\cos\frac{\alpha_0}{2} = m_0\, g\,\frac{a}{2}\sin\alpha_0\,.$$

a s použitím vzťahu $\sin\alpha_0 = 2\sin(\alpha_0/2)\cos(\alpha_0/2)$ dostaneme

$$b_0 - l_0 = \frac{m_0\, g}{k}\sin\frac{\alpha_0}{2}\,. \qquad (1)$$

2 body

b) Výsledný moment sily pri zavesenej nádobke (pre jednoduchosť kladný moment uvažujeme v smere narastania uhlu α – v smere chodu hodinových ručičiek)

$$M = m_0\, g\,\frac{a}{2}\sin\alpha + m\, g\, a\sin\alpha - k\left(b - l_0\right)a\cos\frac{\alpha}{2}$$

Po úprave (napr. $\sin\alpha = 2\sin\alpha/2\cos\alpha/2$)

$$M = a\left[g\,\left(m_0 + 2m\right)\sin\frac{\alpha}{2} - k\,\left(b - l_0\right)\right]\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Pri úprave použijeme $b - l_0 = b - b_0 + b_0 - l_0$ a vzťah (1).

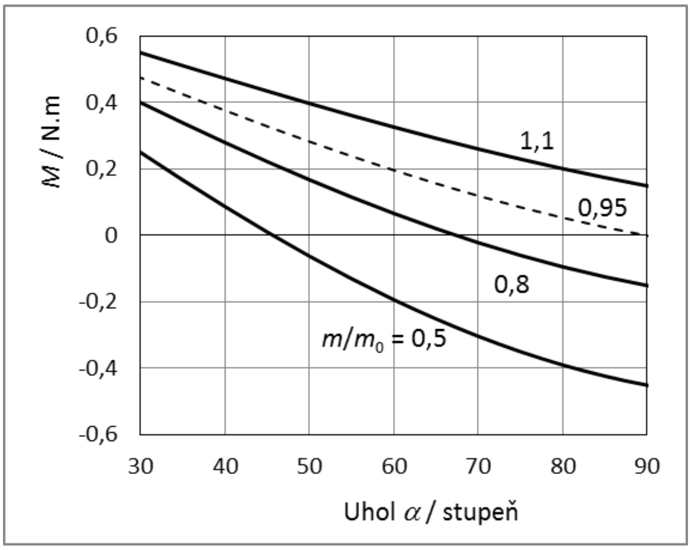
$$M = a\left[g\,\left(m_0 + 2m\right)\sin\frac{\alpha}{2} - k\,\left(b - b_0\right) - m_0\, g\sin\frac{\alpha_0}{2}\right]\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Ďalej vyjadríme $b - b_0 = 2a\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha_0}{2}\right)$ a ďalej

$$M = m_0\, g\, a\left[\left(1 + 2\frac{m}{m_0} - \frac{2\,k\,a}{m_0\, g}\right)\sin\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \frac{2\,k\,a}{m_0\, g}\right)\sin\frac{\alpha_0}{2}\right]\cos\frac{\alpha}{2}\,. \qquad (2)$$

2 body

c) Graf závislosti $M(\alpha)$ pre tri rôzne hodnoty pomeru m / m_0.



Obr. RB–3

2 body

d) Stabilná rovnovážna poloha je daná dvomi podmienkami: v rovnovážnej je nulový výsledný moment sily M a pri zvolenej orientácii momentu sily musí byť v rovnovážnej polohe funkcia $M(\alpha)$ klesajúca (podmienka stability). Ako vidno z predchádzajúceho grafu má závislosť klesajúci charakter, ale nulovú hodnotu nadobúda funkcia iba pre niektoré hodnoty pomeru p. Z podmienky $M = 0$ dostaneme pre uhol α_m

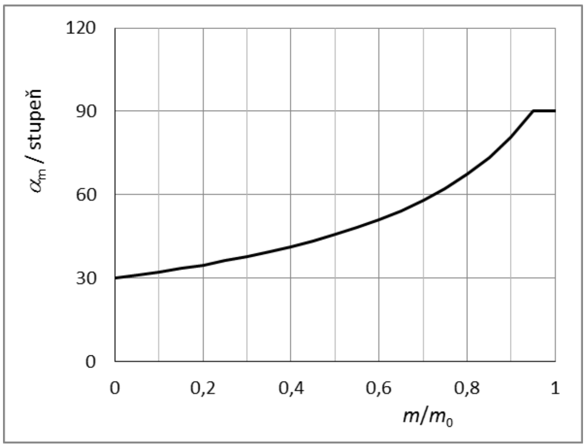
$$\sin\frac{\alpha_m}{2} = \frac{\dfrac{2\,k\,a}{m_0\, g} - 1}{\dfrac{2\,k\,a}{m_0\, g} - 1 - 2\dfrac{m}{m_0}}\ \sin\frac{\alpha_0}{2}\,.$$

Medzný prípad predstavuje $\alpha_m = 90°$, resp. $\sin(\alpha_m/1) = 1/\sqrt{2}$, odkiaľ

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\,k\,a}{m_0\, g} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\alpha_0}{2}\right)$$, pre dané hodnoty $p_{max} \approx 0{,}95$.

Pozn.: Krivka pre pomer p_{max} = 0,95 je na obrázku RB–3 čiarkovane.

Z výsledku je zrejmé, že pre $p < p_{max}$ existuje rovnovážna poloha v rozsahu uhlov od α_0 do 90°. Pre pomer $p \geq p_{max}$ klesne tyč do dolnej krajnej polohy $\alpha = 90°$. **2 body**



Obr. RB–4

2 body

6. *Podchladená voda*

Riešenie:

a) Kapilárny tlak

$$p_k = \frac{2\sigma}{r}$$. Pre dané hodnoty $p_k \approx 14{,}6$ MPa **3 body**

b) Clausius–Clapeyronova rovnica opisuje tlak a teplotu v stave rovnováhy dvoch fáz chemicky čistej látky (v našom prípade vody).

Pre opis deja v p–T súradniciach sa s výhodou využíva Gibbsov termodynamický potenciál G, ktorý je funkciou nezávisle premenných p a T. V prípade uzatvoreného cyklu (sústava sa vráti do východiskového stavu) je $\Delta G = 0$. Elementárna zmena Gibbsovho potenciálu $\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$.

Pri elementárnom cykle pozdĺž fázového rozhrania

$$V_1\,\mathrm{d}p - S_1\,\mathrm{d}T - V_2\,\mathrm{d}p + S_2\,\mathrm{d}T = 0$$

$$dp = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2}\,dT \qquad (1)$$

Ak je 1 kvapalina a 2 ľad, predstavuje $\Delta S = S_1 - S_2 = Q/T$, kde $Q = m\,l_t$ je skupenské teplo tuhnutia vody. $V_1 = m / \rho_V$ a $V_2 = m / \rho_L$. Po dosadení do (1)

$$dp = \frac{l_t}{\frac{1}{\rho_V} - \frac{1}{\rho_L}}\frac{dT}{T} .$$

Ak považujeme veličiny ρ_V, ρ_L a l_t za konštantné, dostaneme integráciou rovnice

$$p - p_0 = \frac{l_t}{\frac{1}{\rho_V} - \frac{1}{\rho_L}}\ln\frac{T}{T_0} .$$

Pre dané hodnoty veličín $\Delta p \approx 1{,}38\times10^8$ Pa. **4 body**

e) Ak je nárast tlaku skupenskej premeny rovný kapilárnemu tlaku, dostaneme

$$r = \frac{2\sigma}{l_t \ln \frac{T}{T_0}} \left(\frac{1}{\rho_V} - \frac{1}{\rho_L} \right)$$

. Pre dané hodnoty $r \approx 5{,}0 \times 10^{-10}$ m.

Jeden mól ľadu obsahuje N_A molekúl a má objem $V_m = M_m/\rho_L$, kde M_m je hmotnosť jedného mólu ľadu. Počet molekúl v mikrokryštálika

$$N = \frac{N_A}{V_m} \frac{4}{3} \pi r^3$$

. Pre dané hodnoty $N \approx 16$. **3 body**

7. *Elektrická vodivosť vody*

Experimentálna úloha – podľa úrovne spracovania **max. 10 bodov**

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Riešenie úloh domáceho kola kategórie B*

Autori úloh:	Kamil Bystrický (2), Ivo Čáp (1, 3až 7)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015