

56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Katégória C – domáce kolo
riešenie úloh

1. Zrážka

Riešenie:

- a) Zo zákona zachovania mechanickej energie pri kĺzavom pohybe nadol určíme rýchlosť prvého telieska pri dosiahnutí dna misky $v_1 = \sqrt{2gR}$. Pri zrážke platí zákon zachovania hybnosti $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u$, kde u je rýchlosť spojených teliesok po zrážke. Platí

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gR}.$$

Pre ďalší pohyb teliesok platí zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = (m_1 + m_2)gh.$$

Z uvedených vzťahov určíme hľadanú výšku výstupu spojených teliesok

$$h = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 R. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Pri dokonale pružnej zrážke majú zákony zachovania hybnosti a mechanickej energie tvar

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2,$$

kde u_1 a u_2 sú rýchlosti teliesok tesne po zrážke. Ich hodnoty určíme riešením tejto sústavy rovníc. Platí

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Pre ďalší pohyb teliesok opäť platí zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_1 g h_1, \quad \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = m_2 g h_2.$$

Z uvedených rovníc dostaneme

$$h_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R, \quad h_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 R. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Pre jednotlivé prípady postupne máme:

I. $m_1 = m_2$:

$u_1 = 0, u_2 = v_1, h_1 = 0, h_2 = R$, to znamená, že telieska si vymenia rýchlosti, prvé teliesko ostane v pokoji na dne misky a druhé vystúpi k jej okraju. **2 body**

II. $m_1 < m_2$:

$u_1 < 0, u_2 > 0$, prvé teliesko sa odrazí nazad a druhé sa bude pohybovať v smere zrážky; pre $m_1 = m_2/2$ platí $u_1 = -v_1/3, u_2 = 2v_1/3$,

$h_1 = R/9, h_2 = 4R/9$. **2 body**

III. $m_1 > m_2$:

$u_1 > 0, u_2 > 0$, obe telieska sa budú pohybovať v smere zrážky; pre $m_1 = 2m_2$ platí $u_1 = v_1/3, u_2 = 4v_1/3, h_1 = R/9, h_2 = 16R/9$. Druhé teliesko vyletí z misky nahor a dosiahne výšku $7R/9$ nad okrajom misky. **2 body**

2. Kesón

Riešenie:

- a) Po dosadnutí na dno bude hladina vo výške h_3 nad dnom kesónu, pretože vzduch v ňom sa stlačí účinkom tlaku vody. Na hladine vody v kesóne bude v rovnováhe tlak vody a tlak vzduchu. Platí

$$p_1 = p_0 + \rho g (h_1 - h_3). \quad (1)$$

Vzduch uzatvorený v komore sa tlakom vody izotermicky stláča z pôvodného tlaku p_0 na výsledný tlak p_1 . Stavová rovnica

$$p_0 S h_2 = p_1 S (h_2 - h_3). \quad (2)$$

Ak vylúčime tlak p_1 máme rovnicu pre výšku h_3

$$h_3^2 - h_3 (H + h_2 + h_1) + h_2 h_1 = 0, \quad \text{kde } H = \frac{p_0}{\rho g}. \quad (3)$$

Riešenie rovnice

$$h_3 = \frac{H + h_2 + h_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(H + h_2 + h_1)^2}{4} - h_2 h_1}. \quad (4)$$

Keďže $h_3 < h_2$, fyzikálny zmysel má iba znamienko (-).

Ak výsledok dosadíme do (1), máme

$$p_1 = \rho g (H + h_1 - h_3) = \rho g \left(\frac{H - h_2 + h_1}{2} + \sqrt{\frac{(H + h_2 + h_1)^2}{4} - h_2 h_1} \right)$$

Pre dané hodnoty veličín $h_3 \approx 1,69$ m, $p_1 \approx 232$ kPa.

2 body

- b) Hmotnosť vzduchu sa pri ponáraní kesónu nemení. Určíme hmotnosť vzduchu s objemom komory kesónu a atmosférickým tlakom

$$p_0 S h_2 = \frac{m_{v1}}{M_{vz}} R T, \quad \text{odkiaľ } m_{v1} = \frac{p_0 S h_2 M_{vz}}{R T}.$$

Pre dané hodnoty veličín a $M_{vz} = 29 \times 10^{-3}$ kg·mol⁻¹ máme $m_{v1} \approx 23$ kg.

1 bod

Pri ponorení pôsobí na kesón vztlaková sila $F_{vztl} = \rho g S h_2$. Keďže pri ponáraní do komory vniká voda, je potrebné ponoriť kesón i so závažím tesne pod hladinu, potom už klesá sám, lebo pribúda vnikajúca voda. Na ocelové závažie pôsobí tiež vztlaková sila, a preto k zaťaženiu kesónu prispieva silou $F_{z1} = m_{z1} (1 - \rho/\rho_{Fe})$.

Výšku h_4 vody v komore pri ponorení na úroveň hladiny určíme zo vzťahu (4), ak namiesto h_1 dosadíme h_2

$$h_4 = \frac{H + 2h_2}{2} - \sqrt{\frac{(H + 2h_2)^2}{4} - h_2^2}, \text{ pre dané hodnoty veličín } h_4 \approx 0,57 \text{ m.}$$

Tiaž vody v komore $F_4 = \rho S h_4 g$.

Pre rovnováhu síl potom platí

$$F_{vztl} < m g + \rho S h_4 g + m_{z1} (1 - \rho / \rho_{Fe}) g + m_{v1} g,$$

odkiaľ

$$m_{z1} > \frac{\rho S (h_2 - h_4) - m - m_{v1}}{1 - \rho / \rho_{Fe}}, \text{ pre dané hodnoty veličín } m_{z1} \approx 14 \text{ ton.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Tlak vzduchu v komore je rovný tlaku vody na dne

$$p_2 = p_0 + \rho g h_1, \text{ pre dané hodnoty veličín } p_2 \approx 248 \text{ kPa.}$$

Hmotnosť vzduchu v komore

$$m_{v2} = M_{vz} \frac{p_2 S h_2}{RT}, \text{ pre dané hodnoty veličín } m_{v2} \approx 56 \text{ kg.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

d) Ak je kesón na dne a po vytlačení vody z komory je podmienka rovnováhy síl

$$m g + m_{v2} g + m_{z2} g (1 - \rho / \rho_{Fe}) > \rho g S h_2,$$

odkiaľ

$$m_{z2} > \frac{\rho S h_2 - m - m_{v2}}{1 - \rho / \rho_{Fe}}, \text{ pre dané hodnoty veličín } m_{z2} > 18 \text{ ton.}$$

Ako vidno, pri záťaži m_{z2} sa kesón ponorí pod hladinu, klesne na dno a zostane na dne i po napustení vzduchu do celého objemu komory. **2 body**

Robotníci pracovali pri tlaku vzduchu p_2 . S narastajúcim tlakom sa zvyšuje množstvo plynov (najmä dusíka) rozpusteného v krvi. Pri náhlom vynorení, a tým poklesu okolitého tlaku dochádza k prudkému uvoľneniu plynov (ako keď sa otvorí fľaša s minerálkou nasýtenou CO_2), čo vedie k vytvoreniu bubliniek v krvi a tým k upchatí malých ciev. To môže viesť až k smrti. Toto ohrozenie zdravia sa nazýva *kesonová choroba*. Návrat na normálny tlak sa musí uskutočniť postupne a dostatočne pomaly – nazýva sa *dekompresia*, aby sa plyn neuvoľnil príliš prudko. **1 bod**

3. Delostrelci

Riešenie:

- a) Rovnice súradníc šikmého vrhu

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pre bod dopadu $y = 0$ dostaneme čas letu projektilu

$$t_D = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

Dolet projektilu

$$x_D = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Maximálny dolet pre $2\alpha = 90^\circ$

$$d_m = \frac{v_0^2}{g}, \text{ pre dané hodnoty } d_m \approx 65 \text{ km.}$$

Zodpovedajúci čas letu projektilu

$$t_m = \frac{\sqrt{2}}{g} v_0, \text{ pre dané hodnoty } t_m \approx 115 \text{ s.}$$

6 bodov

- b) Pre $d < d_m$ existujú dva možné uhly výstrelu. V prípade menšieho uhlu je čas kratší.

Hľadaný uhol

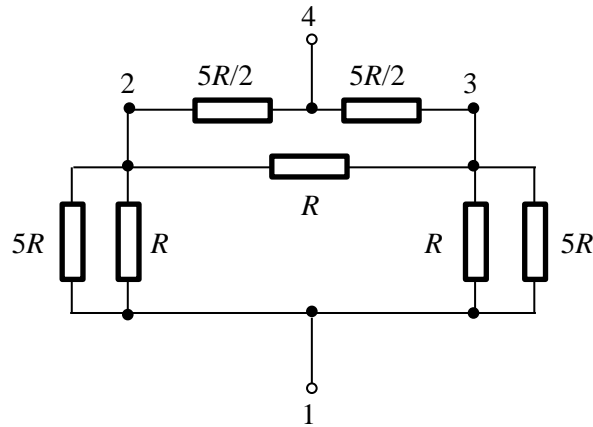
$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{g d}{v_0^2}, \text{ pre dané hodnoty } \alpha \approx 4,6^\circ.$$

4 body

Pozn.: V skutočnosti je dostrel dela oveľa menší vzhľadom na odpor vzduchu.

4. Odpor sústavy vodičov

Riešene:



Obr. RC-1

Obvod najprv prekreslíme, aby bola sieť prehľadnejšia. Označme R odpor krátkeho úseku 12 drôtu. Ide o $1/6$ dĺžky kružnice (stredový uhol 60°), tzn. vonkajší oblúk 12 má odpor $5R$. Medzi uzly 1 a 2 zaradíme dva paralelné rezistory s odpormi R a $5R$. Úseky 24 a 34 predstavujú odpory $(5/2)R$.

a) Určíme odpor R_{13}

$$R_{13} = \frac{\frac{5R}{6} \left(2 \times \frac{5R}{6} \right)}{\frac{5R}{6} + 2 \times \frac{5R}{6}} = \frac{5R}{9}.$$

Odpor krátkeho úseku $R = r \pi d / 6$.

Dĺžkový odpor drôtu $r = \frac{54}{5\pi} \frac{R_{13}}{d}$, pre dané hodnoty $r \approx 230 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$. **3 body**

b) Obvod je symetrický podľa osi 1–4, tzn. uzly 2 a 3 majú pri pripojení zdroja k svorkám 1 a 4 rovnaký potenciál, a preto rezistorom R medzi uzlami 2 a 3 prechádza nulový prúd, a teda ho môžeme odpojiť bez vplyvu na obvod. Odpor medzi svorkami 1 a 4

$$R_{14} = \frac{1}{2} \left[\frac{5R}{2} + \frac{5R \cdot R}{5R + R} \right] = \frac{10}{6} R.$$

Prúd zdroja

$$I_{14} = \frac{U}{R_{14}} = \frac{6U}{10R} = \frac{36U}{10\pi d} \frac{1}{r} = \frac{U}{6 R_{13}}, \text{ pre dané hodnoty } I_{14} \approx 100 \text{ mA}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

c) Medzi uzlami 2 a 4 je odpor

$$R_{24} = \frac{\frac{5R}{2} \times \left(\frac{5R}{2} + \frac{R \times 2 \frac{5R}{6}}{R + 2 \frac{5R}{6}} \right)}{\frac{5R}{2} + \left(\frac{5R}{2} + \frac{R \times 2 \frac{5R}{6}}{R + 2 \frac{5R}{6}} \right)} = \frac{25R}{18}.$$

Prúd zdroja

$$I_{24} = \frac{U}{R_{24}} = \frac{18U}{25R} = \frac{108U}{25\pi d r} = \frac{2U}{5R_{13}}, \text{ pre dané hodnoty } I_{24} \approx 240 \text{ mA.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

5. Ťahanie sánok

Riešenie:

Na obrázku RC-2 je diagram síl pôsobiacich na sánky.

Pre vodorovný smer s použitím druhého Newtonovho zákona môžeme písať $F \cos \alpha - F_t = ma_x = 0$,

kde zrýchlenie a_x v smere osi x je nulové, lebo sánky sa pohybujú s konštantnou rýchlosťou, a F_t je sila trenia.

Pre zvislý smer môžeme písať rovnicu rovnováhy síl

$$F \sin \alpha + N - F_g = ma_y = 0,$$

kde $F_g = mg$ je veľkosť tiažovej sily pôsobiacej na sánky s nákladom a N je veľkosť normálovej sily, ktorou pôsobí sneh na skĺznicu sánok, a ktorá je rovná veľkosti F_N sily, ktorá pritláča sánky k snehu.

Pre treciu silu platí $F_t = f F_N$.

Z týchto rovníc dostaneme

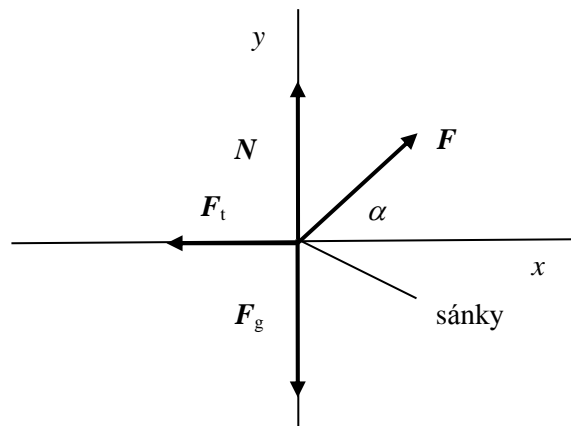
$$F = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \quad (1)$$

$$F_N = \frac{mg \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

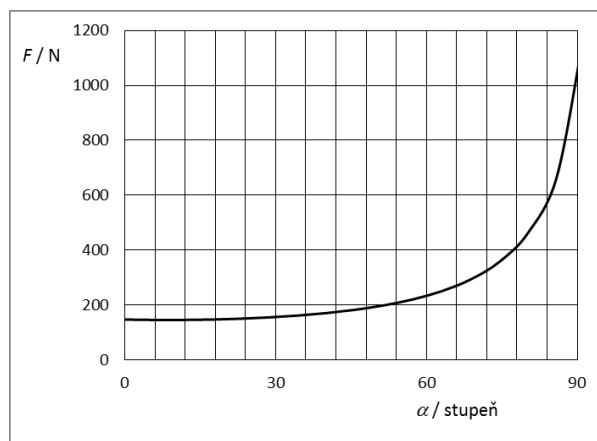
Pre dané hodnoty a uhol $\alpha = 45^\circ$ je $F \approx 181 \text{ N}$, $F_N \approx 852 \text{ N}$.

5 bodov

Graf funkcie $F(\alpha)$ danej vzťahom (1):

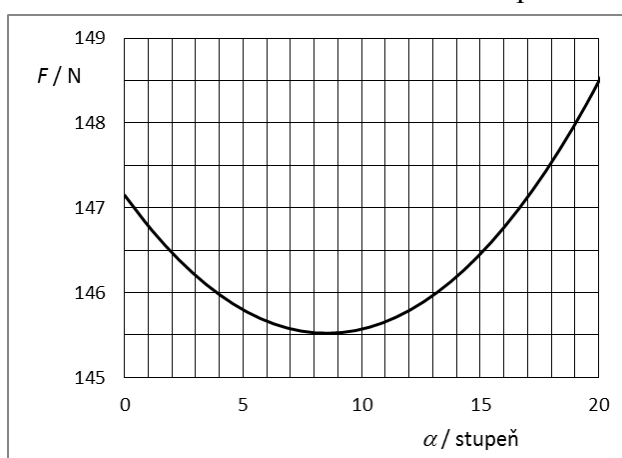


Obr. RC-2



2 body

Ako vidno minimum je v oblasti uhlov menších ako 30° . Graf pre malé uhly



Teraz vidno zreteľne minimum pre uhol $\alpha_m \approx 8,5^\circ$.

Z grafu možno určiť minimálnu hodnotu sily $F_m \approx 145,5$ N.

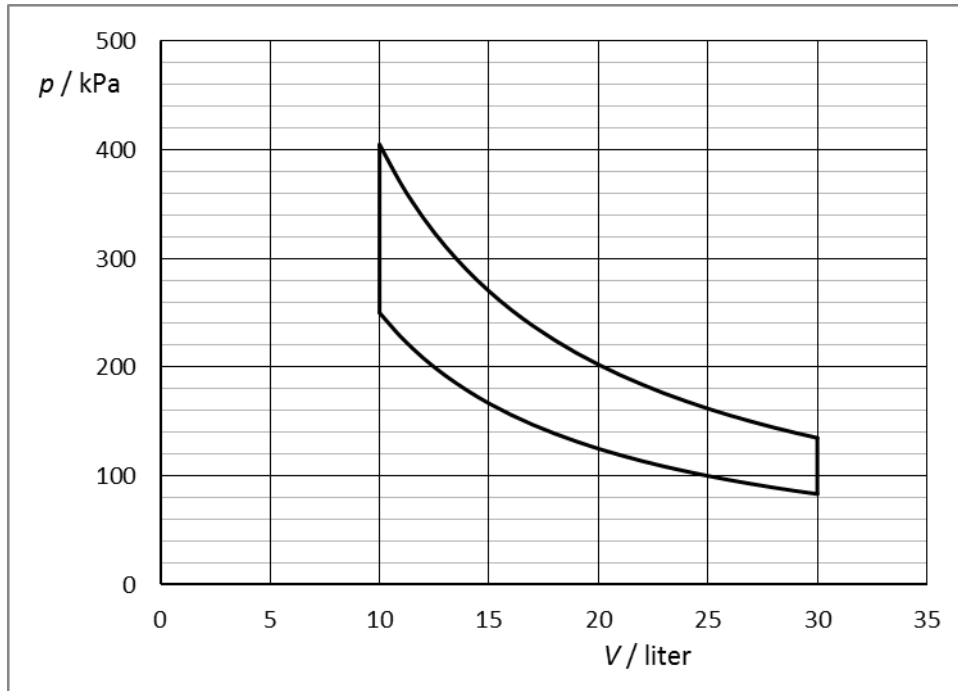
3 body

Pozn.: Po dosadení hodnoty uhla α_m do vzťahu (1) dostaneme rovnakú hodnotu.

6. Termodynamický cyklus

Riešenie:

a) Diagram deja



Ak označíme vrcholy cyklu 0–1–2–3–0, sú hodnoty tlaku v jednotlivých vrcholoch

$$p_0 = 250 \text{ kPa},$$

$$p_1 = \frac{p_0}{T_0} T_1, \text{ pre dané hodnoty } p_1 \approx 405 \text{ kPa},$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = p_0 \frac{1}{k} \frac{T_1}{T_0}, \text{ pre dané hodnoty } p_2 \approx 135 \text{ kPa},$$

$$p_3 = \frac{p_2}{T_2} T_3 = p_0 \frac{1}{k}, \text{ pre dané hodnoty } p_3 \approx 83 \text{ kPa}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

b) V danom cykle koná plyn prácu iba počas izotermických dejov (počas izochorického deja sa práca nekoná)

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_0 \ln k$$

$$W_{30} = \int_{V_2}^{V_1} p dV = p_0 V_1 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = p_0 V_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_2} \right) = -p_0 V_0 \ln k$$

a celková práca

$$W = W_{12} + W_{30} = (p_1 - p_0) V_0 \ln k.$$

Pre dané hodnoty $W \approx 1,70 \text{ kJ}$.

2 body

c) Teplo sa plynu dodáva počas izochorického zohrievania a počas izotermickej expanzie. Teplo dodané počas prvého deja

$$Q_{01} = \Delta U_{01} = C_V (T_1 - T_0),$$

počas druhého deja

$$Q_{12} = W_{12} = p_1 V_0 \ln k .$$

Tepelná kapacita pri konštantnom objeme

$$C_V = \frac{s}{2} n R = \frac{s}{2} \frac{p_0 V_0}{T_1}, \text{ kde pre CO}_2 \text{ je } s = 6.$$

Celkové dodané teplo

$$Q = Q_{01} + Q_{12} = \frac{s}{2} p_0 V_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) + p_0 V_0 \frac{T_1}{T_0} \ln k .$$

Pre dané hodnoty $Q \approx 7,31$ kJ.

2 body

d) Termodynamická účinnosť cyklu

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{(p_1 - p_0) \ln k}{\frac{s}{2} p_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) + p_0 \frac{T_1}{T_0} \ln k}, \text{ pre dané hodnoty } \eta \approx 23 \text{ \%}.$$

Účinnosť Carnotovho cyklu $\eta_C = 1 - \frac{T_0}{T_1}$, pre dané hodnoty $\eta_C \approx 38$ %.

2 body

e) Počas Carnotovho cyklu je celková zmena vnútornej energie nulová a k tepelnej výmene dochádza iba počas izotermických dejov, tzn.

$$\Delta U = -W + Q_{12} + Q_{30} = 0, \text{ pričom } W = Q_{12} \eta_C. \quad (1)$$

Keďže poznáme pomer maximálneho V_3 a začiatočného V_0 objemu (stavy 3 a 0), môžeme určiť teplo

$$Q_{30} = p_0 V_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_3} \right) = - p_0 V_0 \ln k .$$

Dosadením do (1) máme

$$Q_{12} = W - Q_{30} = \eta_C Q_{12} - Q_{30}$$

a teda

$$Q_C = Q_{12} = - \frac{Q_{30}}{1 - \eta_C} = \frac{1}{1 - \eta_C} p_0 V_0 \ln k .$$

Pomer hodnôt dodaného tepla pri oboch cykloch

$$p = \frac{Q}{Q_C} = 1 + \frac{s}{2 \ln k} \frac{T_0}{T_1} \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right).$$

Pre dané hodnoty $p \approx 1,64$.

2 body

7. Teplotná závislosť viskozity vody – experimentálna úloha

max. 10 bodov

56. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie C

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 3), Juraj Slabeycius (2), Ľubomír Mucha (4, 5)

Kamil Bystrický (6), Ivo Čáp (7)

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014