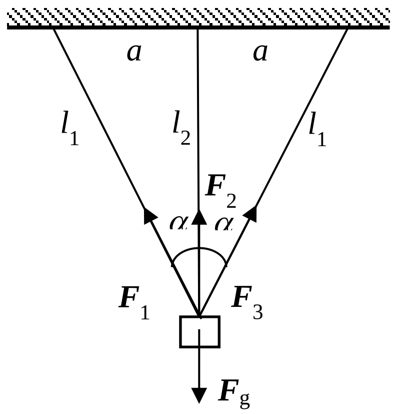
56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015
Kategória B
Úlohy krajského kola – riešenie

1. *Rovnováha síl*

a) V stave rovnováhy sú sily ťahu vlákien a tiažová sila telieska v rovnováhe. Môžu nastať dva prípady:

– po predĺžení krajných vlákien je vypočítaná dĺžka $l_2 < l_0$ a vtedy sa stredná gumička nenapína a $F_2 = 0$ a rovnováhu zabezpečujú iba krajné vlákna,

– pri väčšej hmotnosti sú napnuté všetky gumičky



Obr. RB2–1

V prvom prípade platí v stave rovnováhy

$$2\,F_1 \cos\alpha = m\,g \text{, pričom}$$

$$F_1 = k\,(l_1 - l_0) \quad \text{a} \quad l_1 = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Odtiaľ máme

$$2\,k\left(\frac{a}{\sin\alpha} - l_0\right)\cos\alpha = m\,g \text{ a po úprave}$$

$$m = \frac{2\,k\,l_0}{g}\left(\frac{a}{l_0}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \cos\alpha\right) \qquad (1) \qquad 2b$$

Medzný prípad je daný podmienkou $l_2 = l_0$

a teda $\operatorname{tg}\alpha_k = a/l_0$, resp. $\cos\alpha_k = l_0/\sqrt{l_0^2 + a^2}$. Z prvého výrazu máme

$$\alpha_k = \operatorname{arctg}\frac{a}{l_0} \text{, po dosadení do výrazu (1)}$$

$$m_k = \frac{2\,k\,l_0}{g}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + a^2}}\right). \qquad (2) \qquad 1b$$

Vzťah (1) tak platí pre uhly $\alpha > \alpha_k$

Pre $m < m_k$, tzn. uhly $\alpha > \alpha_k$, sú napnuté iba krajné vlákna a vzťah pre hmotnosť m ako funkciu α je (1). 1b

V druhom prípade $m > m_k$ sú napnuté všetky vlákna, pričom rovnováhu síl vyjadruje rovnica

$$2\,F_1 \cos\alpha + F_2 = m\,g \text{, pričom}$$

$$F_1 = k\,(l_1 - l_0) = k\left(\frac{a}{\sin\alpha} - l_0\right) \text{ a } F_2 = k(l_2 - l_0) = k\left(\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} - l_0\right)$$

a po dosadení

$$m = \frac{2\,k\,l_0}{g}\left[\frac{a}{l_0}\,\frac{3}{2\ \mathrm{tg}\alpha} - \cos\alpha - \frac{1}{2}\right] \qquad (3) \qquad 1\text{b}$$

Pre $\alpha = \alpha_\mathrm{k}$

$$m_\mathrm{k} = \frac{2\,k\,l_0}{g}\left(1 - \cos\alpha_\mathrm{k}\right),$$ čo sa zhoduje so vzťahom (2). 1b

$m_\mathrm{k} \approx 182$ g, $\alpha_\mathrm{k} \approx 56°$.

b) Hodnota $\alpha_1 > \alpha_\mathrm{k}$, preto $m_1 < m_\mathrm{k}$ a podľa vzťahu (1) $m_1 \approx 149$ g.

Hodnota $\alpha_2 < \alpha_\mathrm{k}$, preto $m_2 > m_\mathrm{k}$ a podľa vzťahu (3) $m_2 \approx 425$ g. 2b

c) V prípade $\alpha > \alpha_\mathrm{k}$ pri vychýlení x z rovnovážnej polohy nadol pôsobí na teliesko výsledná sila

$$F = mg - 2F_1\cos\alpha = m\,g - 2\,k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(l_2+x)^2 + a^2}}\right)(l_2 + x).$$

Ak zanedbáme x vo výraze pod odmocninou v porovnaní s $l_2 >> x$, $a >> x$, máme

$$F = -\,2\,k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_2^2 + a^2}}\right)x = -2\,k\left(1 - \frac{l_0}{a}\sin\alpha\right)x = -\,K_1\,x\,.$$

$$K_1 = 2\,k\left(1 - \frac{l_0}{a}\sin\alpha\right).$$ Pre dané hodnoty $K_1 \approx 17\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. 1b

V prípade $\alpha < \alpha_\mathrm{k}$ sa uplatní ťah i strednej gumičky. Po posunutí o x nadol z rovnovážnej polohy je výsledná sila pôsobiaca na teliesko

$$F = mg - 2F_1\cos\alpha - F_2 = m\,g - 2\,k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(l_2+x)^2 + a^2}}\right)(l_2 + x) - k(l_2 + x - l_0)$$

Ak pre veľmi malé posunutie x zanedbáme x vo výraze pod odmocninou, máme

$$F = -\,3k\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{l_0}{\sqrt{l_2^2 + a^2}}\right)x = -\,3k\left(1 - \frac{2\,l_0}{3a}\sin\alpha\right)x = -\,K_2\ x\,.$$

$$K_2 = 3k\left(1 - \frac{2\,l_0}{3a}\sin\alpha\right).$$ Pre dané hodnoty $K_2 \approx 41\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. 1b

2. *Elektrické a magnetické pole*

a) Napätie určíme pomocou Faradayovho indukčného zákona $u = \mathrm{d}\Phi / \mathrm{d}t$, kde $\Phi = B\,S\sin\alpha$, B veľkosť magnetickej indukcie, $S = a\,b$ obsah závitu a α uhol medzi vektorom $\boldsymbol{B}$ magnetickej indukcie a rovinou závitu. Pri otáčaní závitu sa mení uhol $\alpha = \omega\,t$, a teda

$\Phi = B\,S\sin\omega\,t.$

Indukované napätie

$$u\,(t)=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\omega B\,a\,b\cos\omega t=U_{\mathrm{m}}\cos\omega t\,.$$

Napätie dosahuje maximálnu hodnotu $U_{\mathrm{m}} = \omega B\, a\, b$

a maximálnu hodnotu nadobúda v okamihu, keď je vektor $\boldsymbol{B}$ rovnobežný s rovinou závitu, tzn. $\omega t = 0$ alebo π. 2b

Pozn: K rovnakému výsledku možno dospieť, ak uvažujeme napätie indukované vo vodičoch tvoriacich strany b závitu. V každom vodiči $u_1 = B\,b\,v_{\perp}$, kde $v_{\perp} = \omega\,(a/2)\cos\omega t$ *je zložka rýchlosti vodiča kolmá k* $\boldsymbol{B}$. *Napätia obidvoch vodičov sa sčítajú, takže* $u = \omega B\,a\,b\cos\omega t$.

b) Na priamy vodič s prúdom i pôsobí v magnetickom poli sila $F = B\,i\,l$, ktorá je kolmá na vodič a vektor $\boldsymbol{B}$. Na obidva vodiče s dĺžkou b pôsobí moment spolu $M = 2\times B\,i\,b\times(a/2)\cos\alpha$.

$$M=B\,\frac{u\,(t)}{R+R_0}\,a\,b\cos\omega t=\ B\,\frac{\omega B^2}{R+R_0}\,(a\,b)^2\cos^2\omega t=\ B\,\frac{\omega B^2}{R+R_0}\,(a\,b)^2\,\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,.$$

Stredná hodnota funkcie $\cos 2\omega t$ je na perióde priebehu nulová, preto stredná hodnota

$$M_{\mathrm{s}}=\ \frac{1}{2}\frac{\omega B^2}{R+R_0}\,(a\,b)^2\,.$$ 2b

c) Stredná hodnota mechanického výkonu pri stálych otáčkach

$$P_{\mathrm{m}}=M_{\mathrm{s}}\,\omega=\ \frac{1}{2}\frac{\omega^2 B^2}{R+R_0}\,(a\,b)^2\,.$$

Elektrický výkon na spotrebiči

$$P_{\mathrm{z}}=R\,i^2=R\,\frac{u^2}{(R+R_0)^2}=R\,\frac{\omega^2 B^2\,(a\,b)^2}{(R+R_0)^2}\cos^2\omega t=R\,\frac{\omega^2 B^2\,(a\,b)^2}{(R+R_0)^2}\,\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,.$$

Stredná hodnota

$$P_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}R\,\frac{\omega^2 B^2\,(a\,b)^2}{(R+R_0)^2}\,.$$ 2b

Výkonové prispôsobenie spočíva v maximálnej hodnote výrazu $R/(R + R_0)^2$. Maximum sa určí z nulovej hodnoty derivácie vzťahu podľa R. Pre maximum platí podmienka $R = R_0$. Maximálna hodnota výkonu

$$P_{\mathrm{s\,max}}=\frac{1}{8}\frac{\omega^2 B^2\,(a\,b)^2}{R_0}\,.$$ 2b

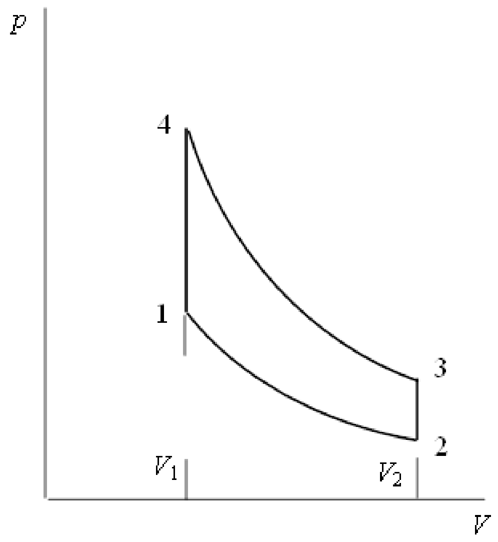
d) Účinnosť pri výkonovom prispôsobení

$$\eta=\frac{R}{R+R_0}$$, pre výkonové prispôsobenie $\eta\,(\%) = 50\ \%$. 2b

3. *Tepelný stroj*

a) Cyklus pozostáva z adiabatickej fázy 1–2 (expanzia), izochorickej fázy 2–3, adiabatickej fázy 3–4 (kompresia) a izochorickej fázy 4–1. Ak má plyn vo fáze 4–1 odovzdávať teplo, tzn. ochladzovať sa, musí teplota a tým aj tlak plynu klesať. Keďže adiabaty sa nepretínajú, musí byť $p_2 < p_3$, a teda $T_2 < T_3$, čo znamená, že plyn prijíma teplo, a tým sa zohrieva. 2b

Diagram, obr. RB2–2 2b



Obr. RB2–2

b) Prvý dej 1–2 je adiabatická expanzia, pre ktorú platí

$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$, pričom platí stavová rovnica $pV = n R_m T$.

Z týchto rovníc dostávame rovnicu pre veličiny V a T

$$T_A V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}\text{, odkiaľ } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = T_A \frac{1}{k^{\kappa-1}}. \qquad 1b$$

Rovnako určíme teplotu v stave 4

$$T_B V_2^{\kappa-1} = T_4 V_1^{\kappa-1}\text{, odtiaľ } T_4 = T_B \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = T_B k^{\kappa-1}. \qquad 1b$$

Pre dané hodnoty $T_2 \approx 288$ K, $T_4 \approx 343$ K.

Aby plyn dodával teplo kvapaline v komore KA, musí platiť $T_4 > T_A$. Od kvapaliny v komore KB musí plyn teplo prijímať, tzn. $T_2 < T_B$.

Z podmienok

$$T_2 = T_A \frac{1}{k^{\kappa-1}} < T_B \qquad\qquad T_4 = T_B k^{\kappa-1} > T_A$$

máme $k > \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$.Pre dané hodnoty $k > 1{,}33$ 1b

c) Celková zmena vnútornej energie počas uzatvoreného cyklu je nulová, preto vykonaná práca W je rovná rozdielu odovzdaného Q_A a prijatého Q_B tepla. Pri adiabatickej zmene k tepelnej výmene nedochádza, takže určujeme teplo iba pri izochorických fázach cyklu. Pri izochorickej zmene sa práca nekoná, preto teplo je dané zmenou vnútornej energie plynu

$Q = \Delta U = C_V \, \Delta T$, kde tepelná kapacita $C_V = n\, C_{Vm}$.

$$Q_A = n\, C_{Vm} \left(T_4 - T_A\right) = 3 n R_m \left(T_B k^{\kappa-1} - T_A\right)$$

$$Q_B = n\,C_{Vm}\left(T_B - T_2\right) = 3n\,R_m\left(T_B - \frac{T_A}{k^{\kappa-1}}\right).$$ 1b

Vykonaná práca

$$W = Q_A - Q_B = 3n\,R_m\left[T_B\left(k^{\kappa-1} - 1\right) - T_A\left(1 - \frac{1}{k^{\kappa-1}}\right)\right]$$ 1b

Efektivita zdroja

$$\eta = \frac{T_B\,k^{\kappa-1} - T_A}{T_B\left(k^{\kappa-1} - 1\right) - T_A\left(1 - \frac{1}{k^{\kappa-1}}\right)}.$$ 1b

Pre dané hodnoty veličín $Q_A \approx 669$ J, $W \approx 84$ J, $\eta \approx 8{,}0$.

Z výsledku vidno, že stroj umožňuje získať približne 8× viac energie vo forme tepla, ako je energia vynaložená na jeho poháňanie.

4. *Elektrický obvod*

a) $$I = \frac{U_0}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$, kde $\omega = 2\pi f$. 2b

Pre dané hodnoty $I_1 \approx 0{,}15$ A, $I_2 \approx 0{,}29$ A.

b) $$C_m = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$. Pre dané hodnoty $C_m \approx 2{,}0$ μF. 2b

$$I_m = \frac{U_0}{R_0 + R}$$. Pre dané hodnoty $I_m \approx 0{,}86$ A. 2b

c) $$U_{RL} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\; I_m = U_0 \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R_0 + R}.$$ 2b

Pre dané hodnoty $U_{RL} \approx 136$ V. Pomer napätí $U_{RL}/U_0 \approx 5{,}7$.

d) Činný výkon je nenulový iba na rezistoroch $P = U\,I = R\,I^2$. Na kapacitoroch a induktoroch je činný výkon nulový.

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R\,I^2}{R_0\,I^2 + R\,I^2} = \frac{R}{R_0 + R}$$. Pre dané hodnoty η (%) ≈ 71 %. 2b

56. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori úloh:	Ľubomír Konrád (1,3), Ivo Čáp (2,4)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015