56. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2014/2015

Riešenie úloh krajského kola kategórie C

1. *Hádzanie loptičiek*

a) Vo vodorovnom smere ide o rovnomerný pohyb s rýchlosťou $v_0 \cos\alpha$. Loptička prvého chlapca prekoná vzdialenosť x_1 za čas $t = x_1/(v_1 \cos\alpha)$. Vzdialenosť chlapcov pri rovnakej dobe letu loptičiek

$$d = x_2 - x_1 = (v_2 - v_1)\, t \ \cos\alpha = \frac{v_2 - v_1}{v_1}\, x_1 . \qquad \text{1b}$$

Rozdiel výšok bodov dopadu loptičiek na stenu

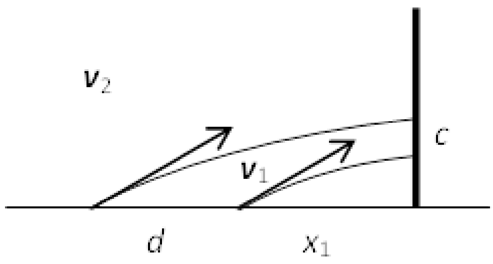
$$c = y_2 - y_1 = \left(v_2\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 \right) - \left(v_1\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 \right) = (v_2 - v_1)\, t \sin\alpha$$

a po dosadení za dobu letu

$$c = \frac{v_2 - v_1}{v_1}\, x_1 \ \mathrm{tg}\alpha . \qquad \text{1b}$$

Pre dané hodnoty veličín $d \approx 1{,}25$ m a $c \approx 72$ cm. Z výsledku vidno, že druhý chlapec musel byť ďalej od steny ako prvý a jeho loptička dopadla vyššie ako loptička prvého chlapca. 2b

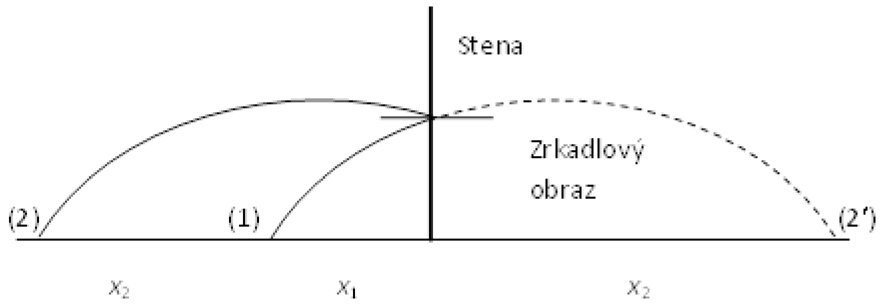
Obr. RC2–1 1b



Obr. RC2–1

b) Keďže odraz je dokonale pružný, možno trajektóriu po odraze loptičky od steny nakresliť zrkadlovo za rovinu steny, čím dostaneme trajektóriu, ako keby tam stena nebola. Dolet loptičky je potom $x_1 + x_2$, pozri situačný obrázok.

Obrázok RC2–2 1b



Obr. RC2–2

Pre zložky trajektórie platí

$$x = v_1\, t \ \cos\alpha_1 \qquad\qquad y = v_1\, t \sin\alpha_1 - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Pre bod dopadu máme $x = x_1 + x_2$ a $y = 0$.

Z druhej podmienky dostaneme čas letu $t = \dfrac{2v_1}{g} \sin\alpha_1$

a z prvej dolet $x_1 + x_2 = v_1\, t \cos\alpha = \dfrac{2v_1^2}{g} \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = \dfrac{v_1^2}{g} \sin 2\alpha_1$.

Pre uhol výstrelu dostaneme vzťah $\sin 2\alpha_1 = \dfrac{g}{v_1^2}\left(x_1 + x_2\right)$.

Pre dané hodnoty veličín $\sin 2\alpha_1 \approx 0{,}92$, čomu zodpovedajú dva uhly $\alpha_1 \approx 33°$ a $\alpha_1 \approx 57°$.

2b

c) Funkcia $\sin 2\alpha$ nadobúda maximálnu hodnotu 1 pre uhol $2\alpha = 90°$ a teda $\alpha = 45°$. Tomuto uhlu zodpovedá pri danej rýchlosti v_1 maximálny dolet loptičky, a teda maximálna vzdialenosť druhého chlapca

$x_2 = \dfrac{v_1^2}{g} - x_1$. Pre dané hodnoty veličín $x_2 \approx 16$ m 2b

2. *Zrážka guľôčok*

a) Pri zrážke sa zachováva hybnosť

$$m_1\, v_{10} + m_2\, v_{20} = m_1\, v_1 .$$

Hybnosti vyjadríme pomocou kinetickej energie guľôčok pred zrážkou

$$\sqrt{2E_\mathrm{k}}\left(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}\right) = m_1\, v_1 . \qquad (1)$$

Pri dokonale pružnej zrážke je kinetická energia pred zrážkou rovná kinetickej energii po zrážke

$$2\,E_k = \frac{1}{2} m_1\, v_1^2 . \qquad (2)$$

Z výrazov (1) a (2) máme

$$p = \frac{m_2}{m_1} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \approx 0{,}17.$$ 3b

b) Rýchlosť pohybu hmotného stredu sústavy má veľkosť

$$v_\mathrm{T} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1+p}\, v_1 = \frac{v_1}{1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \frac{v_1}{2\left(2 - \sqrt{2}\right)} .$$

Pre danú hodnotu v_1 máme $v_\mathrm{T} \approx 0{,}17\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. 3b

c) Počas zrážky dochádza k deformácii guľôčok, pri ktorej sa časť mechanickej energie sústavy mení z kinetickej na potenciálnu deformačnú. Ak sledujeme guľôčky vo vzťažnej sústave spojenej s ich hmotným stredom, je maximálna deformácia v okamihu, keď sa guľôčky zastavia, tzn. v sústave kabíny majú rovnakú rýchlosť v_T. Vtedy je maximálna deformačná energia a minimálna kinetická

$$E_{\mathrm{k\,min}} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_\mathrm{T}^2 = \frac{1}{1+p}\, \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2\left(2 - \sqrt{2}\right)}\, E_{\mathrm{k\,max}} ,$$

a teda $q = \dfrac{E_{\mathrm{k\,min}}}{E_{\mathrm{k\,max}}} = \dfrac{1}{2\left(2 - \sqrt{2}\right)} \approx 0{,}85.$ 4b

3. *Rotujúci valec s plynom*

a) Na piest vychýlený o r z rovnovážnej polohy pôsobí odstredivá sila $m\,\omega^2 r$ a rozdiel tlakových síl plynu. Celková sila

$$F = m\,\omega^2 r + p\,S\,\frac{l}{l+r} - p\,S\,\frac{l}{l-r} = m\,\omega^2 r - p\,S\,\frac{2\,l\,r}{(l+r)(l-r)} = \left(m\,\omega^2 - p\,S\,\frac{2\,l}{l^2-r^2}\right) r\,.$$

Ak je $F < 0$, sila má vratný charakter a pri malej výchylke z rovnovážnej polohy sa piest vráti nazad do stredu valca – ide o stabilnú rovnovážnu polohu.

Ak je $F > 0$, piest sa posúva od osi.

Pri malej výchylke $r \ll l$ je výraz v zátvorke

$$k = m\,\omega^2 - p\,S\,\frac{2\,l}{l^2-r^2} \approx m\,\omega^2 - \frac{2\,p\,S}{l}\,.$$

Poloha piestu v strede valca je stabilná, ak $k < 0$, tzn.

$$\omega < \sqrt{\frac{2\,p\,S}{m\,l}} = \omega_0\,.$$ 4b

Pre dané hodnoty $\omega_0 \approx 63{,}2\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ ($N_0 \approx 10{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$) 1b

b) Pre uhlovú frekvenciu $\omega < \omega_0$ je výchylka $r = 0$. Pre uhlovú frekvenciu $\omega > \omega_0$ vyplýva výchylka piestu z podmienky rovnováhy $F = 0$

$$m\,\omega^2 - p\,S\,\frac{2\,l}{l^2-r^2} = 0\,,$$ odkiaľ máme

$$r = \sqrt{l^2 - p\,S\,\frac{2\,l}{m\,\omega^2}}\,.$$ 4b

Pre $N_1 = 300\ \mathrm{min^{-1}} = 6{,}0\ \mathrm{s^{-1}} < N_0$ je $r_1 = 0$.

Pre $N_2 = 900\ \mathrm{min^{-1}} = 15\ \mathrm{s^{-1}} > N_0$ je $r_2 \approx 14{,}8$ cm. 1b

4. *Adiabatická expanzia plynu*

Stav ideálneho plynu opisuje stavová rovnica

$$pV = n\,R\,T\,. \qquad (1) \qquad 1b$$

Pri adiabatickej zmene stavu sa zachováva súčin $p\,V^{\kappa}$ a teda platí

$$pV^{\kappa} = p_0\,V_0^{\kappa}\,. \qquad (2) \qquad 1b$$

a) V prvom prípade vylúčime z rovnice (2) tlak pomocou rovnice (1)

$$\frac{n\,R\,T}{V}V^{\kappa} = \frac{n\,R\,T_0}{V_0}V_0^{\kappa}\,,$$

odkiaľ máme $T_1 = T_0\left(\dfrac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1}$. (3)

Pre dané hodnoty $T_1 \approx 736$ K, resp. $t_1 \approx 460$ °C. 2b

b) Z rovníc (1) a (2) vylúčime objem a máme

$T = T_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{\kappa}}$. Pre dané hodnoty $T_2 \approx 117$ K, resp. $t_2 \approx -160$ °C. 2b

c) Pri adiabatickom deji je práca plynu rovná zápornej zmene vnútornej energie. S použitím (1) a (3) máme

$$W = -\Delta U = -n\,C_V\,(T_3 - T_0) = \left(\frac{p_0 V_0}{R T_0}\right)\left(\frac{5}{2}R\right)T_0\left[1-\left(\frac{V_0}{V_3}\right)^{\kappa-1}\right]$$

a po úprave

$W = \dfrac{5}{2}p_0 V_0\left[1-\left(\dfrac{1}{k_2}\right)^{\kappa-1}\right]$. Pre dané hodnoty veličín $W \approx 2{,}9$ kJ. 4b

56. ročník Fyzikálnej olympiády – ***Úlohy krajského kola kategórie C***

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 2, 3), Ivo Čáp (4),
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015