

57. ročník Fyzikálnej olympiády

v školskom roku 2015/2016

Kategória A – domáce kolo

riešenie úloh

1. Hranol na naklonenej rovine

Riešenie:

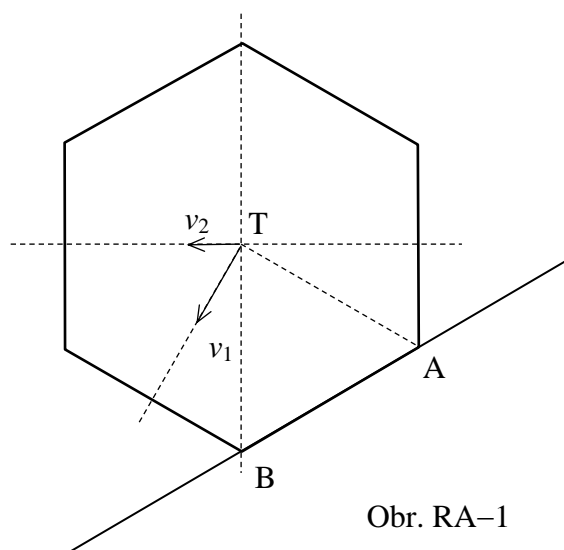
- a) Ak sa ťažisko dostane nad hranu A, tzn. $\alpha_1 = 30^\circ$, začne sa hranol otáčať okolo osi prechádzajúcej hranou A. Pred dopadom hrany B na naklonenú rovinu poklesne ťažisko o $h_1 = a \sin \alpha_1$. Kinetická energia je rovná poklesu potenciálnej energie

$$-\Delta E_{p1} = m g a \sin \alpha_1 = E_{k1}.$$

Kinetická energia má rotačnú a posuvnú zložku

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{a^2} \right) v_1^2.$$

Odtiaľ $v_1 = \sqrt{\frac{2 g a \sin \alpha_1}{1 + \frac{I}{m a^2}}}$ 2b



Obr. RA-1

- b) Tesne pred dopadom do polohy znázornenej na obr. RA-1 bola rýchlosť ťažiska $v_1 = a \omega_1$, kde ω_1 je uhlová rýchlosť otáčania okolo hrany A v tomto okamihu. Keď sa hrana B dotkne naklonenej roviny, začne sa hranol otáčať okolo tejto hrany uhlovou rýchlosťou ω_2 , pričom ťažisko sa pohybuje rýchlosťou $v_2 = a \omega_2$. Sila reakcie v hrane B má vzhľadom na os B nulový moment, preto počas zmeny osi A na os B platí zákon zachovania momentu hybnosti vzhľadom na os B.

Moment hybnosti vzhľadom na os B pred dopadom

$$J_1 = m \frac{a}{2} v_1 + I \omega_1 = \left(I + \frac{1}{2} m a^2 \right) \omega_1,$$

moment hybnosti vzhľadom na os B tesne po odraze

$$J_2 = m a v_2 + I \omega_2 = (I + m a^2) \omega_2.$$

Z rovnosti hodnôt momentov hybnosti máme

$$v_2 = \frac{I + \frac{1}{2} m a^2}{I + m a^2} v_1 = \frac{1 + \frac{2I}{m a^2}}{1 + \frac{I}{m a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I}{m a^2}}} \sqrt{\frac{1}{2} g a \sin \alpha_1} = \frac{22}{17} \sqrt{\frac{3}{17}} \sqrt{g a} \approx 0,54 \sqrt{g a}.$$

Pomer v_2/v_1 nezávisí od polohy hranolu na naklonenej rovine, tzn. je rovnaký pri prvom i n -tom odraze.

Kinetická energia po dopade

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{a^2} \right) v_2^2.$$

Pomer hodnôt kinetickej energie

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \left(\frac{I + \frac{1}{2} m a^2}{I + m a^2} \right)^2 = \left(\frac{11}{17} \right)^2 \approx 0,42. \quad 2b$$

Pri nepružnom náraze dochádza k strate 58 % mechanickej energie.

- c) Frekvencia prechodu od jednej hrany k nasledujúcej postupne narastá a súčasne rastú aj straty energie pri odraze. Pohyb prejde postupne do ustáleného stavu, kedy je rozdiel potenciálnej energie pri jednom kroku rovný poklesu kinetickej energie pri odraze od naklonenej roviny,

$$E_{k3} - E_{k4} = m g a \sin \alpha_1.$$

Po dosadení a úprave máme ustálenú hodnotu rýchlosti ťažiska v_2 pri odraze

$$v_4^2 = 2 g a \sin \alpha_1 \frac{\left(1 + \frac{2I}{m a^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{I}{m a^2} \right) \left(3 + \frac{4I}{m a^2} \right)}$$
$$v_4 = \sqrt{\frac{121}{238} g a} \approx 0,71 \sqrt{g a} \quad 2b$$

- d) Pri otáčaní okolo osi B so začiatočnou uhlovou rýchlosťou $\omega_2 = v_2/a$ sa rýchlosť mení podľa zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} (I + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} (I + m a^2) \omega_2^2 + m g a (1 - \cos \varphi)$$

Pohybová rovnica

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{m g a}{I + m a^2} \sin \varphi, \text{ resp. približne } \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{m g a}{I + m a^2} \varphi = 0$$

Ide o rovnicu harmonického pohybu s uhlovou frekvenciou

$$\Omega = \sqrt{\frac{m g a}{I + m a^2}} = \sqrt{\frac{12 g}{17 a}} \approx 0,84 \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Výchylka úsečky BT zo zvislého smeru

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin \Omega t.$$

Uhlová rýchlosť

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_m \Omega \cos \Omega t, \text{ pričom v čase } t = 0 \text{ platí } \omega_2 = \varphi_m \Omega \text{ a teda } \varphi_m = \frac{v_2}{a \Omega}.$$

Pri preklopení do novej polohy $\varphi_1 = \alpha_1 = 30^\circ$, resp. $\pi/6$ rad, a čas preklopenia, tzn. čas, za ktorý sa posunie ťažisko o vzdialenosť a v smere naklonenej roviny

$$t_2 = \frac{1}{\Omega} \arcsin\left(\frac{a \Omega \alpha_1}{v_2}\right) = \sqrt{\frac{17}{12}} \sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin\left(\frac{17}{11} \frac{\pi}{6}\right) \approx 1,12 \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

V prípade ustáleného pravidelného pohybu

$$t_4 = \frac{1}{\Omega} \arcsin\left(\frac{a \Omega \alpha_1}{v_4}\right) = \sqrt{\frac{17}{12}} \sqrt{\frac{a}{g}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{12 \times 238}{17 \times 121}} \frac{\pi}{6}\right) \approx 0,79 \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad 3b$$

Za čas t_4 sa ťažisko posunie o a v smere naklonenej roviny

$$v_s = \frac{a}{t_4} \approx 1,26 \sqrt{a g}. \quad 1b$$

Pozn.: V prípade valca k stratám mechanickej energie nedochádza a jeho pohyb pozdĺž naklonenej roviny je rovnomerne zrýchlený.

2. Elektrický obvod

Riešenie:

- a) V prvej vetve (vľavo) spotrebič R je paralelne s kapacitorom, ktorého impedancia sa zvyšuje pri znižovaní frekvencie. Zároveň impedancia induktora sa znižuje. Pri znižovaní frekvencie preto amplitúda prúdu spotrebiča rastie. V druhej vetve je to opačne, pri zvyšovaní frekvencie sa zväčšuje impedancia induktora paralelného so spotrebičom a klesá impedancia kapacitora. Pri zvyšovaní frekvencie preto prúd druhým spotrebičom narastá. Na ľavom rezistore budú preto prevládať nižšie frekvencie a na pravom vyššie frekvencie prúdu. *Pozn.: Ak budú spotrebiče reproduktory, ľavý bude vydávať tóny hlbšie a pravý tóny vyššie.* 2b

- b) Admitancia obvodu vzhľadom na svorky S_1 a S_2 (admitancia je výhodnejšia, keď sú vetvy sústavy paralelné)

$$Y = \frac{1}{R \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}} = \frac{1}{R} \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega 2CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}.$$

Impedancia sústavy

$$Z = \frac{1}{Y} = R \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}{1 - \omega^2 LC + j\omega 2CR}.$$

Keďže reálne časti komplexných výrazov v čitateli a menovateli sú rovnaké, impedancia je reálna, ak sú aj imaginárne časti čitateľa a menovateľa rovnaké a zlomok má reálnu hodnotu jedna. Z toho priamo vyplýva

$$2CR = \frac{L}{R}, \text{ resp. } R = \sqrt{\frac{L}{2C}}. \quad (1)$$

Pri splnení tejto podmienky je impedancia sústavy $Z = R$.

2b

c) Prúdy v jednotlivých vetvách

$$I_1 = \frac{U}{Z_1 + Z_2} = \frac{U}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}}, \quad I_2 = \frac{U}{Z_3 + Z_4} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}}$$

a prúdy v spotrebičoch

$$I_{R1} = I_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U}{R} \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$$

$$I_{R2} = I_2 \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = -\frac{U}{R} \frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}}$$

Výkon na jednotlivých spotrebičoch

$$P_1 = R I_{R1}^2 \quad P_2 = R I_{R2}^2,$$

kde I_{R1} a I_{R2} sú efektívne hodnoty prúdov v spotrebičoch.

Pri frekvencii f_0 , resp. uhlovej frekvencii $\omega_0 = 2\pi f_0$, sú výkony, a teda aj efektívne hodnoty prúdov, rovnaké, čo zodpovedá podmienke

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (2)$$

Z podmienok (1) a (2) dostávame

$$L = \sqrt{2} \frac{R}{\omega_0} \quad C = \frac{1}{\sqrt{2} R \omega_0}$$

$$a \quad P = \frac{U^2}{R} \frac{1}{\left(\omega_0 \frac{L}{R}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R}.$$

Pre dané hodnoty: $L \approx 0,90 \text{ mH}$, $C \approx 7,0 \text{ }\mu\text{F}$, $P = 9,0 \text{ W}$, $P_z = 18 \text{ W}$.

3b

Pri frekvencii f_0 sa výkon zdroja $P_z = U^2/R$ rozdelí rovnakým dielom medzi obidva spotrebiče.

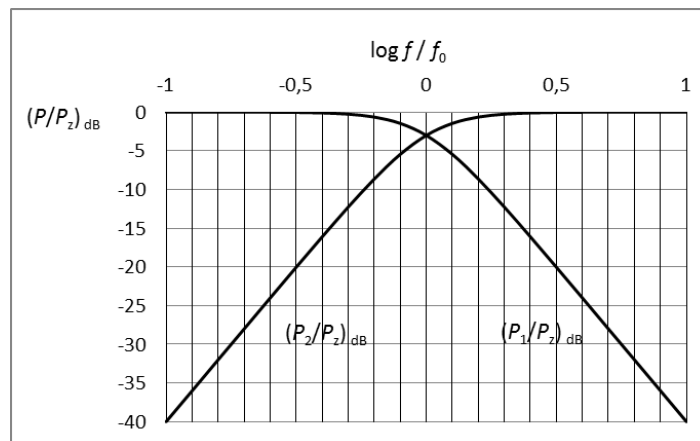
d) Výkon na jednotlivých spotřebičích

$$P_1 = \frac{U^2}{R} \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}$$

$$P_2 = \frac{U^2}{R} \frac{(\omega^2 LC)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}$$

Pre znázornenie grafu vzťahy pre výkon upravíme na tvar

$$\frac{P_1}{P_z} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad \frac{P_2}{P_z} = \frac{\left(\frac{f}{f_0}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad 2b$$



Obr. RA-2

1b

3. Oko

Riešenie:

- a) Plocha sietnice je plocha povrchu gule, prislúchajúca lieviku so stredovým uhlom 2θ vzhľadom na os (stredový uhol je dvojnásobkom uhlu obvodového),

$$S = 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (1 - \cos 2\theta).$$

Obsah šesťuholníka so stranou a

$$S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Ak uvážime počet N buniek, $S = N S_1$ a odtiaľ

$$a = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{2\pi}{N} \left(\frac{D}{2}\right)^2 (1 - \cos 2\theta)}, \text{ pre dané hodnoty } a \approx 1,38 \mu\text{m}. \quad 2b$$

- b) Zväzok rovnobežných lúčov sa zaostrí na sietnici, a teda obrazová ohnisková vzdialenosť (v kvapalnom prostredí) je rovná vzdialenosti šošovky od sietnice $f_o = d$.

Keďže prostredia pred a za šošovkou sa líšia indexom lomu, teda i rýchlosťou šírenia svetla, zodpovedá pomer ohniskových vzdialeností prevrátenému pomeru indexov lomu

$$f_p = \frac{f_o}{n} = \frac{d}{n}, \text{ pre dané hodnoty } f_p \approx 17,0 \text{ mm. Optická mohutnosť } D \approx 58,8 \text{ dioptrií.}$$

2b

- c) Na obr. RA-3 je nakreslený chod lúčov sústavou. Z obrázku je zrejmé, že ohniská nie sú symetricky voči šošovke. Lúč, ktorý prechádza stredom šošovky sa lomí podľa Snellovho zákona lomu.

Z geometrických vzťahov máme

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{l - f_p}{f_p} = \frac{f_o}{d - f_o},$$

pričom $y_1 = l \operatorname{tg} \alpha$ a $y_2 = d \operatorname{tg} \beta$.

Ak uvážime pre malé uhly vzhľadom na os $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta \approx \sin \alpha / \sin \beta = n$, dostaneme

$$f_p = \frac{d l}{d + n l} \text{ a } f_o = \frac{n d l}{d + n l}. \text{ Odtiaľ vidíme v b) použitý vzťah } f_o / f_p = n.$$

Pre dané hodnoty $f_o \approx 21,2 \text{ mm}$ a $f_p \approx 15,9 \text{ mm}$, čo je 62,9 dioptrií.

2b

- d) Minimálna rozlíšiteľnosť na sietnici je

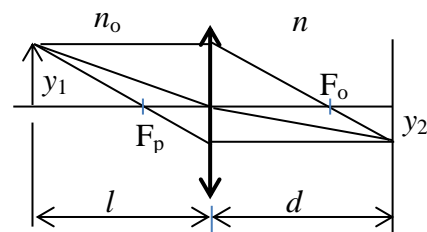
$$\Delta x = 4 a \cos 60^\circ = 4 a \frac{\sqrt{3}}{2},$$

obr. RA-4,

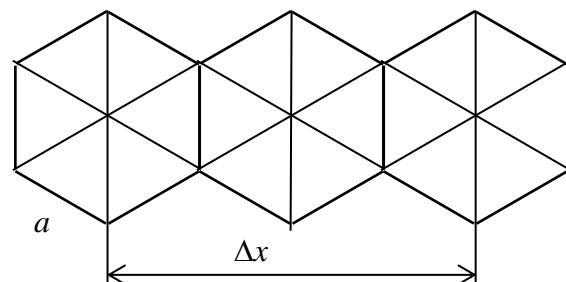
pre dané hodnoty $\Delta x \approx 4,78 \mu\text{m}$.

Zo stredu šošovky Δx vidno pod uhlom

$$\Delta \beta = \Delta x / d.$$



Obr. RA-3



Obr. RA-4

Pred šošovkou sa uhol zmení na

$$\Delta\alpha = n \Delta\beta = 4a \frac{\sqrt{3}}{2} n / d .$$

Pre dané hodnoty $\Delta\varphi \approx 2,81 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 0,97' \approx 1'$ (jedna uhlová minúta). 2b

- e) Pri difrakcii na otvorení je uhol hlavného maxima $\Delta\varepsilon \approx \lambda / b$, pre kruhový otvor presnejšie $\Delta\varepsilon = 1,22 \lambda / b$. Uhol $\Delta\varepsilon \approx D / d$ (približne pre malý uhol). λ je vlnová dĺžka v sklovci λ_0/n

$$b = 1,22 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{D}, \text{ resp. } b = \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{D},$$

pre dané hodnoty pre $D = 8 \text{ mm}$: $b \approx 1,4 \text{ }\mu\text{m}$, pre $D = 2 \text{ mm}$: $b \approx 5,7 \text{ }\mu\text{m}$, resp. $4,7 \text{ }\mu\text{m}$.

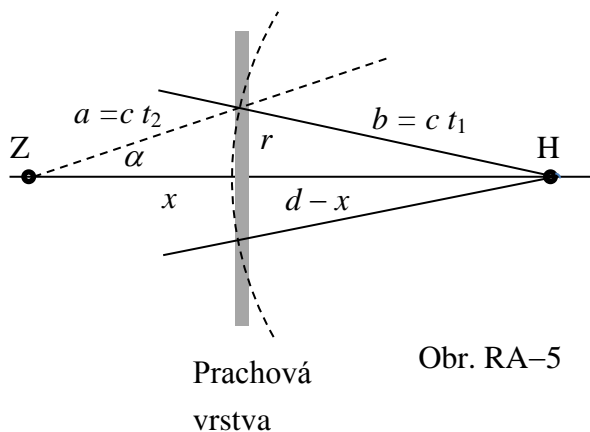
Z výsledku vidno, že pri silnom svetle (zrenica sa zúži) je strata rozlišovacej schopnosti vplyvom difrakcie badateľná ($b > \Delta x$). Pri bežných podmienkach (priemer zrenice okolo 4 mm) je $b < \Delta x$, tzn. difrakčná strata rozlišovacej schopnosti sa prakticky neuplatní.

2b

4. *Circinus X-1*

Riešenie:

- a) EM impulz sa šíri do všetkých smerov od hviezdy.



Za čas t od okamihu výbuchu vlnoplocha postúpi do vzdialenosti ct a v dôsledku rozptylu na vrstve prachu vytvorí prstenec s polomerom r , ktorý je zo Zeme vidieť pod vrcholovým uhlom α , obr. RA-5. Žiarenie postupuje od prstenca k Zemi po dobu t_2 . Priamu vzdialenosť $HZ = d$ prekoná impulz za čas t_0 . Zistené oneskorenie pozorovania prstenca

$$\Delta t = t_1 + t_2 - t_0, \text{ resp. } c \Delta t = a + b - d,$$

pričom

$$a = \frac{x}{\cos\alpha} \quad \text{a} \quad b = \sqrt{r^2 + (d-x)^2} = \sqrt{(x \operatorname{tg} \alpha)^2 + (d-x)^2}.$$

Odtiaľ máme

$$c \Delta t = \frac{x}{\cos\alpha} + \sqrt{(x \operatorname{tg} \alpha)^2 + (d-x)^2} - d.$$

$$c \Delta t + d - \frac{x}{\cos\alpha} = \sqrt{(x \operatorname{tg} \alpha)^2 + (d-x)^2} > 0$$

$$\left(c \Delta t + x - \frac{x}{\cos\alpha} + d - x \right)^2 = (x \operatorname{tg} \alpha)^2 + (d-x)^2$$

$$\left(c \Delta t + x - \frac{x}{\cos\alpha} \right)^2 + (d-x)^2 + 2 \left(c \Delta t + x - \frac{x}{\cos\alpha} \right) (d-x) = (x \operatorname{tg} \alpha)^2 + (d-x)^2$$

a teda

$$d = x + \frac{(x \operatorname{tg} \alpha)^2 - \left(c \Delta t + x - \frac{x}{\cos\alpha} \right)^2}{2 \left(c \Delta t + x - \frac{x}{\cos\alpha} \right)}. \quad 3b$$

Pre dané hodnoty $d \approx 30\,600 \text{ ly} \approx 9,4 \text{ kpc}$.

1b

Pozn.: Publikovaná hodnota $d \approx 9,4 \text{ kpc}$, napr. <http://arxiv.org/abs/1506.06142>.

1 pc (parsek) je vzdialenosť x , z ktorej vzdialenosť Zem–Slnko $d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ vidno pod uhlom 1 uhlová sekunda:

$$1 \text{ pc} = (1,5 \times 10^{11} \text{ m}) / \operatorname{tg}(1'') \approx 3,09 \times 10^{16} \text{ m}.$$

Svetelný rok je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za rok

$$1 \text{ ly} = (3,0 \times 10^8 \text{ m}) \times (365,25 \times 24 \times 3600 \text{ s}) = 9,47 \times 10^{15} \text{ m}.$$

Konštanta prevodu $k \approx 3,27 \text{ ly/pc}$.

1b

K výbuchu hviezdy došlo pred 30 600 rokmi.

1b

- b) K posunutiu absorpčnej čiary dochádza v dôsledku Dopplerovho javu. Molekuly CO sa v laboratórnych podmienkach excitujú žiarením s frekvenciou f_0 . Ak sa mrak pohybuje smerom k Zemi, tzn. od zdroja rádiového žiarenia s frekvenciou f , dochádza k dopplerovskému posunutiu frekvencie žiarenia k nižšej frekvencii $\Delta f = f(v/c)$. Molekuly sú preto excitované žiarením s frekvenciou

$$f = f_0 + f \frac{v}{c}, \text{ kde } f = f_0 + \Delta f.$$

Odtiaľ

$$v = \frac{\Delta f}{f_0 + \Delta f} c. \quad 3b$$

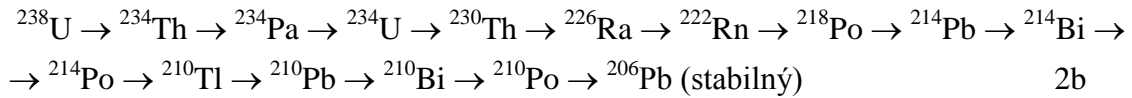
Pre dané hodnoty $v \approx 31,0 \text{ km/s}$, pričom prachový oblak sa pohybuje smerom k Zemi.

1b

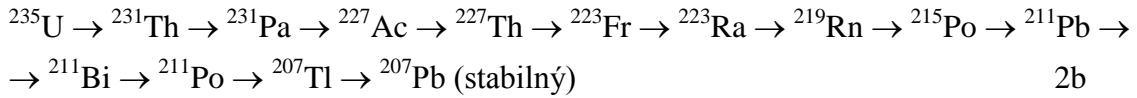
5. Doba vzniku Zeme

Riešenie:

a) Urán–rádiový rad:



Urán–aktíniový rad



Premeny, u ktorých sa mení nukleónové číslo o 4 sú premeny α , zvyšné, pri ktorých sa nukleónové číslo nemení sú premeny β .

Keďže polčas premeny ${}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th}$ je oveľa väčší ako polčasy nasledujúcich premien, celkový polčas radu premien daný polčasom prvej premeny. Rovnako u druhého radu je polčas prvej premeny o mnoho rádov väčší ako u zvyšných premien. 1b

b) Podľa zákona rádioaktívnej premeny

$$N_{\text{U}238}(t) = N_{\text{U}238}(0) e^{-\frac{\ln 2}{T_1} t} \quad \text{a} \quad N_{\text{U}235}(t) = N_{\text{U}235}(0) e^{-\frac{\ln 2}{T_2} t}.$$

Počet vzniknutých atómov olova

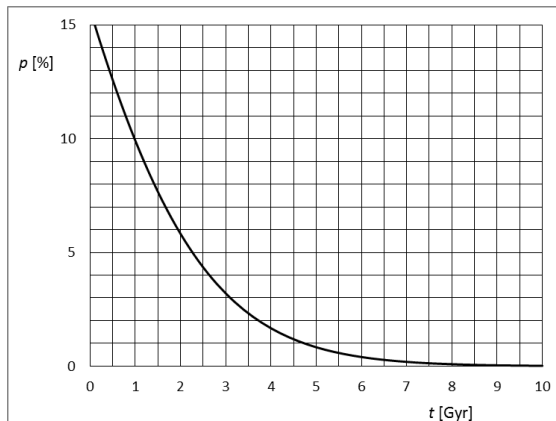
$$N_{\text{Pb}206}(t) = N_{\text{U}238}(0) \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_1} t} \right) = N_{\text{U}238}(t) \left(e^{\frac{\ln 2}{T_1} t} - 1 \right)$$

$$N_{\text{Pb}207}(t) = N_{\text{U}235}(0) \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_2} t} \right) = N_{\text{U}235}(t) \left(e^{\frac{\ln 2}{T_2} t} - 1 \right)$$

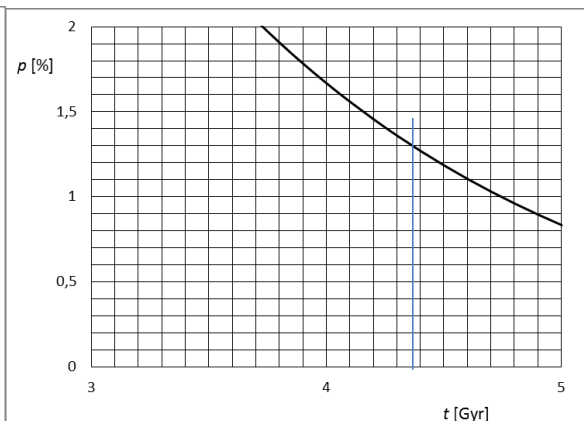
Z pomeru rovníc máme

$$p_1 = p_2 \frac{e^{\frac{\ln 2}{T_1} t} - 1}{e^{\frac{\ln 2}{T_2} t} - 1}, \text{ resp. } p = \frac{e^{\frac{\ln 2}{T_1} t} - 1}{e^{\frac{\ln 2}{T_2} t} - 1}. \quad 2b$$

c) Grafy funkcie $p = f(t)$



Obr. RA-6



Obr. RA-7

0,5b + 0,5b

Za účelom presnejšieho určenia požadovaných hodnôt je vhodné zostrojiť výsek grafu s väčšou rozlišovacou schopnosťou.

Zo zadaných hodnôt máme $p = p_1/p_2 = 1,30$ a tomu zodpovedá vek vzorky $t = 4,37$ Gyr, tzn. 4,37 miliárd rokov. 2b

6. Raketoplán

Riešenie:

a) Na kružnicovom orbite sú v rovnováhe sila gravitácie a zotrvačná sila

$$G \frac{M m}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h}, \text{ kde } v = \omega (R+h) = \frac{2\pi}{T} (R+h),$$

odkiaľ

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R+h}}, \text{ pre dané hodnoty } v \approx 7,71 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}, \text{ pre dané hodnoty } T \approx 5,493 \times 10^3 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 31 \text{ m } 33 \text{ s.} \quad 1b$$

b) Dýzou motora SRB prechádza plyn s hmotnostným prietokom $Q_{m1} = m_1/t_1$, kde $m_1 = 500$ t je hmotnosť paliva v motore a $t_1 = 120$ s čas zapnutého motora. Ťahová sila motora $F_1 = \Delta p / \Delta t = v_1 m_1/t_1$, kde v_1 je výtoková rýchlosť plynov z dýzy,

$$v_1 = \frac{F_1 t_1}{m_1}, \text{ pre dané hodnoty } v_1 \approx 2,83 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad 1b$$

Rovnako určíme výtokovú rýchlosť plynov z dýzy motora SSME

$$v_2 = \frac{F_2 t_2}{(m_O + m_H)/3}, \text{ pre dané hodnoty } v_2 \approx 4,56 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad 1b$$

c) Počas krátkej doby po štarte možno považovať hmotnosť zostavy raketoplánu za konštantnú. Začiatočná hodnota zrýchlenia je

$$a_0 = \frac{2F_1 + 3F_2 - m_0 g}{m_0}, \text{ pre dané hodnoty } a_0 \approx 4,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 0,487 g.$$

Pohyb možno považovať za rovnomerne zrýchlený so zrýchlením a_0 . Čas výstupu do výšky h_0

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{a_0}}, \text{ pre dané hodnoty } t_0 \approx 5,0 \text{ s.} \quad 1b$$

d) Vo všeobecnom bode trajektórie platí pohybová rovnica

$$m \frac{dv}{dt} = F_M - F_g - F_o,$$

kde F_M je celkový ťah motorov v danom mieste, $F_g = m g$ tiažová sila, $F_o = k v^2$ sila odporu vzduchu, m a v hmotnosť a rýchlosť v danom mieste.

Vzhľadom na premenlivú hmotnosť zostavy a komplikovanú závislosť odporovej sily od výšky a od rýchlosti je analytické riešenie nemožné. Použijeme preto numerické riešenie pre dané konkrétne hodnoty. 1b

Použijeme metódu konečných prírastkov. V čase t má zostava výšku h , rýchlosť v a hmotnosť m . V čase $t + \Delta t$ je výška $h + \Delta h$ a rýchlosť $v + \Delta v$, kde $\Delta h = v \Delta t$ a $\Delta v = F \Delta t$. Na výpočty po jednotlivých krokoch zvolíme vhodný počítačový program, Ďalší opis zodpovedá použitiu tabuľkového procesora MS EXCEL:

- V tabuľke sledujeme niekoľko stĺpcov: 1. čas t , 2. výška h , 3. rýchlosť v , 4. hmotnosť m , 5. pomer hustoty vzduchu ρ/ρ_0 , 6. koeficient odporovej sily k , zrýchlenie a .
- Do prvého riadku vložíme začiatkové hodnoty $t = 0$, $h = 0$, $v = 0$, $m = m_0$, $\rho/\rho_0 = 1$, $k = k_0$, $a = a_0$.
- Do druhého riadku a nasledujúcich riadkov vložíme $t = t_n$, $h_n = h_{n-1} + v_{n-1} (t_n - t_{n-1})$, $v_n = v_{n-1} + a_{n-1} (t_n - t_{n-1})$, $m_n = m_0 - Q_M (t_n - t_0)$, $\rho_n/\rho_0 = \exp(-h_n/\delta)$, $k_n = k_0 (\rho_n/\rho_0)$ a zrýchlenie

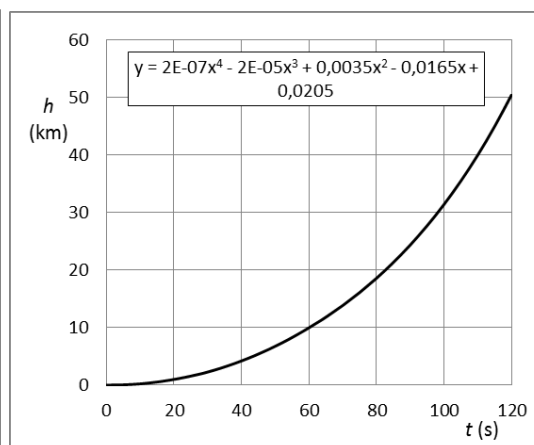
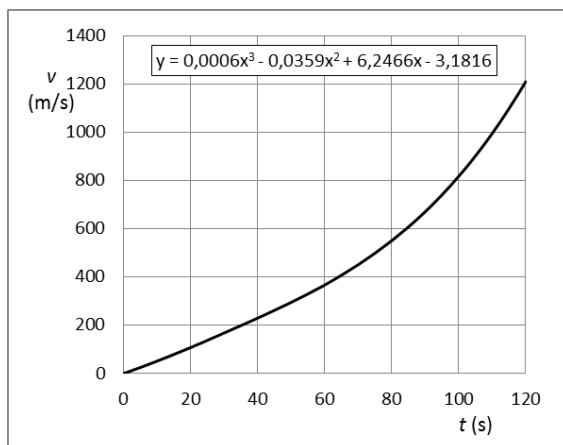
$$a_n = \frac{F_M - k_n v_n^2}{m_n} - g .$$

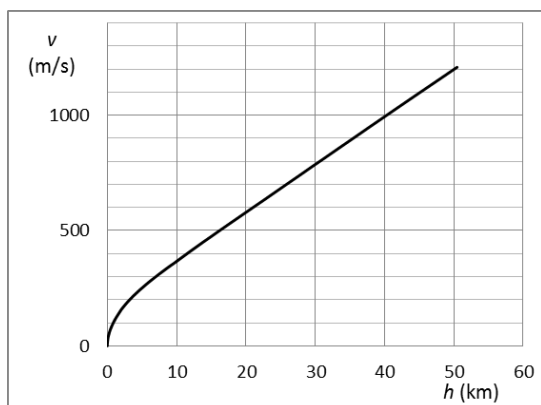
Q_M je hmotnostný prietok paliva v dýzach motorov.

Postupne tak krok po kroku dostaneme hodnoty sledovaných veličín t , h , v a a počas letu. Z týchto hodnôt môžeme zostrojiť každý z požadovaných grafov.

Pozn.: Časy v prvom stĺpci treba prispôsobiť zmenám veličín. Podstata metódy spočíva v tom, že v intervale Δt považujeme hmotnosť m za konštantnú a pohyb rovnomerne zrýchlený. Tam, kde sa veličiny rýchlo menia, je vhodné voliť interval Δt kratší, tam, kde sa veličiny menia pomaly stačí interval Δt dlhší. Napr. prvú desatinu sekundy rozdeliť na 10 krokov po 0,01 s, do jednej sekundy na desať intervalov po 0,1 s, do šesťdesiatich sekúnd po 1 s, zvyšok do 120 s po 5 s. 2b

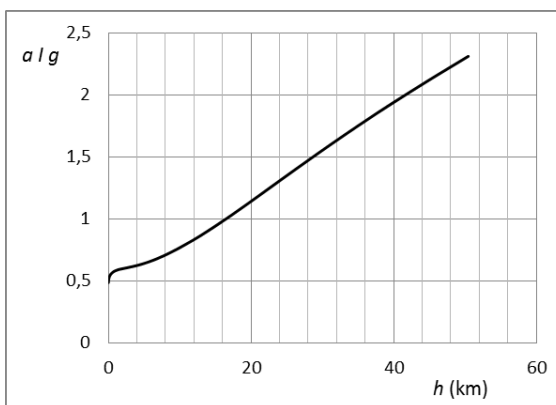
Grafy:





Obr. RA-7

až



Obr. RA-10

2b

Z výpočtovej tabuľky alebo z grafov určíme hodnoty:

$$h_z = 8,3 \text{ km pre rýchlosť } 330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad 0,5b$$

$$h_1 = 50 \text{ km}, v_1 = 1\,200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, a_1 = 2,3 \text{ g} \quad 0,5b$$

Pre čas do 120 s pracujú všetky motory. Keby sme chceli opísať pokračovanie pohybu, znížili by sme hmotnosť o odhodené motory SRB, použili iba tri motory SSME a neuvažovali odpor vzduchu. Ďalšie pokračovanie v zvislom smere však nezodpovedá skutočnosti. Po odhodení motorov sa trajektória výrazne skláňa, obr. A-6, a to by sa muselo do dynamiky pohybu zaradiť.

7. Odpor vlákna žiarovky – experimentálna úloha

Poznámka k riešeniu:

- Žiarovka sufit má výhodu jednoduchej geometrie vlákna.
- V žiarovke je vákuum, takže sa nemodifikuje spektrum žiarenia ako u žiaroviek s halogénmi.
- Prívod k špirálke vlákna má nízku tepelnú vodivosť, čo priaznivo ovplyvňuje straty tepla vedením; odvodom tepla prívodmi sa ovplyvňuje funkcia $P(T)$ hlavne v oblasti nízkych teplôt blízkych izbovej teplote; závislosť $P \sim T^4$ sa dá očakávať najmä v oblasti vysokých teplôt.

57. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 2, 3, 6, 7), Aba Teleki, (4), Ľubomír Konrád a Ivo Čáp (5)

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015