

## 57. ročník Fyzikálnej olympiády

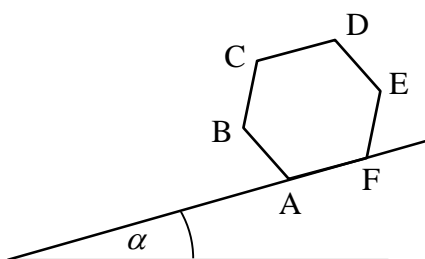
v školskom roku 2015/2016

**Kategória A – domáce kolo**

texty úloh

### 1. Hranol na naklonenej rovine

Na horný koniec naklonenej roviny s dĺžkou  $l$  postavíme pravidelný šesťboký hranol s dĺžkou hrany  $a \ll l$  (napr. ceruzku) a geometrickou osou kolmou na spádovú priamku naklonenej roviny, obr. A–1. Uhol  $\alpha$  naklonenej roviny postupne zväčšujeme až po hodnotu  $\alpha_1$ , pri ktorom sa hranol prevráti. Predpokladajte, že hranol sa potom bude pohybovať po naklonenej rovine bez prešmykovania.



Obr. A–1

V okamihu tesne pred dopadom hrany B na naklonenú rovinu má ťažisko hranola rýchlosť  $v_1$  a kinetickú energiu  $E_{k1}$ . V okamihu tesne po oddelení hrany A od naklonenej roviny ťažisko má rýchlosť  $v_2$  a kinetickú energiu  $E_{k2}$ .

- Určte kinetickú energiu  $E_{k1}$  a hodnotu  $v_1$  rýchlosti ťažiska tesne pred dopadom hrany B na naklonenú rovinu.
- Určte kinetickú energiu  $E_{k2}$  a hodnotu  $v_2$  rýchlosti ťažiska tesne po dopadu hrany B a pomer  $p = E_{k2}/E_{k1}$ .
- Vysvetlite, prečo na dostatočne dlhej naklonenej rovine prejde pohyb hranola na pravidelný. Určte rýchlosť  $v_4$  ťažiska po odraze od naklonenej roviny po ustálení pravidelného pohybu.
- Určte čas  $t_2$ , za ktorý sa otočí hranol okolo hrany B od okamihu dopadu hrany B do okamihu dopadu hrany C na naklonenú rovinu. Určte hodnotu  $t_4$  tohto času pre pravidelný pohyb hranola a strednú rýchlosť  $v_s$  pohybu ťažiska hranola pozdĺž naklonenej roviny.

Predpokladajte, že trenie medzi hranolom a naklonenou rovinou je dostatočne veľké, aby sa hranol na naklonenej rovine neprešmykoval. Odrazy hranola od naklonenej roviny pri jeho prevracaní okolo hrán sú dokonale nepružné.

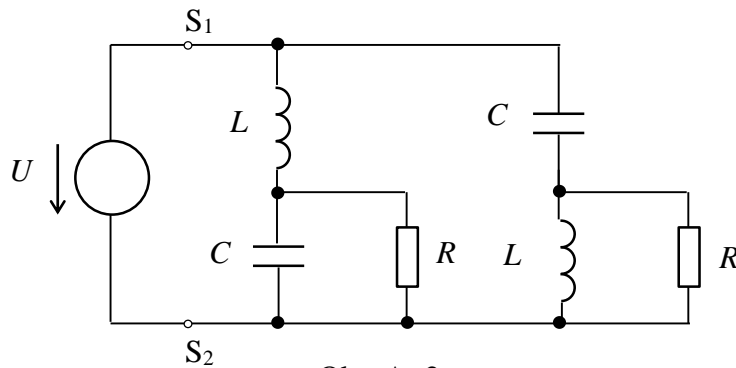
*Pozn.1: Moment zotrvačnosti pravidelného 6–bokého hranola vzhľadom na jeho rotačnú geometrickú os  $I = (5/12) m a^2$ .*

*Pozn.2: Pri riešení odrazu hranola využite zákon zachovania momentu hybnosti.*

*Pozn.3: V časti d) považujte vzťah  $\sin x \approx x$  za dostatočne presný až do uhlu  $\pi/6$  rad.*

## 2. Elektrický obvod

Elektrická výhybka je obvod, ktorý slúži na frekvenčné odlíšenie zložiek signálu. Na obr. A-2 je schéma elektrickej výhybky s dvomi vetvami, ktoré sú pripojené k zdroju s harmonickým napätím  $U$ . Elektrické spotrebiče, rezistory s rovnakým odporom  $R = 8,0 \Omega$ , sú pripojené ku zdroju prostredníctvom frekvenčných filtrov  $L, C$ .

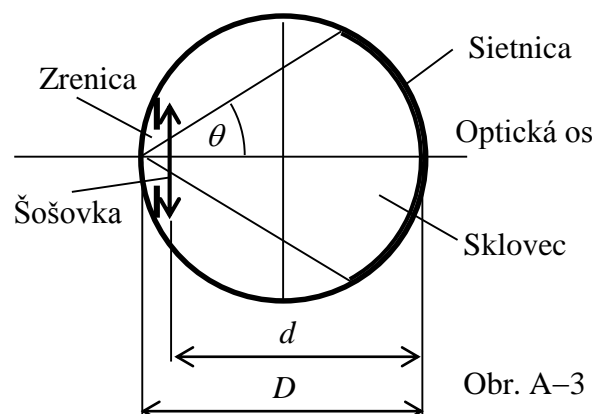


Obr. A-2

- Vysvetlite na základe úvahy, v ktorom zo spotrebičov bude väčšia amplitúda prúdu pri vysokej frekvencii, resp. pri nízkej frekvencii napätia zdroja.
- Určte podmienky, ktoré musia spĺňať indukčnosti  $L$  a kapacity  $C$ , aby bola impedancia  $Z$  obvodu vzhľadom na svorky  $S_1, S_2$  frekvenčne nezávislá, a určte impedanciu  $Z$  v tomto prípade.
- Pri splnení podmienky podľa b) určte indukčnosti  $L$  a kapacity  $C$  tak, aby pri frekvencii  $f_0 = 2,0 \text{ kHz}$  zdroja napätia boli hodnoty  $P_1, P_2$  výkonu na oboch spotrebičoch rovnaké  $P_1 = P_2 = P$ . Určte hodnotu  $P$  tohto výkonu, ak poznáme efektívnu hodnotu  $U = 12 \text{ V}$  napätia zdroja.
- V spoločnom grafe zostrojte frekvenčné charakteristiky relatívneho výkonu  $P_1/P_z$  a  $P_2/P_z$  oboch spotrebičov vzhľadom na výkon  $P_z$  zdroja v rozsahu frekvencií  $200 \text{ Hz}$  až  $20 \text{ kHz}$ . Na osi frekvencie použite logaritmickú stupnicu  $\log(f/f_0)$ , relatívne výkony vyjadrite v jednotkách dB (decibel). Pozn.:  $(P/P_z)_{\text{dB}} = 10 \log(P/P_z)$ .

## 3. Oko

Ľudské oko je optický senzor, ktorý umožňuje vytváranie vizuálneho vnemu v mozgu. Oko si môžeme zjednodušene predstaviť ako guľu s priemerom  $D = 24 \text{ mm}$ , ktorá má na zadnej vnútornej



Obr. A-3

strane sietnicu, ktorá pozostáva z  $N = 120$  miliónov svetlo citlivých buniek (tyčínok). Tyčinky sú rozložené na ploche, ktorá sa javí zo vstupného vrcholu oka pod vrcholovým uhlom  $\theta = 35^\circ$ , obr. A-3.

a) Predpokladajte, že bunky sú na sietnici usporiadané v šesťuholníkovej štruktúre. Určte stranu  $a$  šesťuholníka, pripadajúceho na jednu bunku.

V prednej časti oka sa nachádza optická sústava, ktorú si pre jednoduchosť predstavíme ako jednoduchú spojnú šošovku vo vzdialenosti  $d = 22,7$  mm od sietnice. Na vonkajšej strane šošovky je vzduch, na vnútornej očná kvapalina (sklovec) s indexom lomu  $n = 1,336$ . Šošovka je pružná a môže meniť optickú mohutnosť. Pri pozeraní do veľkej vzdialenosti je šošovka uvoľnená a tenká, pri pozeraní na blízko šošovka zhrubne (akomoduje sa) tak, aby na sietnici vznikol vždy ostrý obraz.

b) Určte predmetovú a obrazovú ohniskovú vzdialenosť uvoľnenej šošovky a jej optickú mohutnosť (prevrátená hodnota predmetovej ohniskovej vzdialenosti)

c) Určte optickú mohutnosť šošovky, ak sa akomoduje na predmet v konvenčnej zrakovej vzdialenosti  $l = 25$  cm.

Oko rozlíši dva body, ktoré sa na sietnici premietnu na dve bunky, medzi ktorými sa nachádza jedna neexponovaná bunka.

d) Určte uhlovú rozlišovaciu schopnosť  $\Delta\alpha$  oka pre body v blízkosti optickej osi oka.

Svetlo vstupuje do oka cez zrenicu, ktorá môže meniť svoj priemer  $\delta$  od 2 mm do 8 mm a tak reguluje výkon vstupujúceho svetelného zväzku. Prechodom cez otvor dochádza k difrakcii.

e) Určte minimálny priemer  $b$  plôšky na sietnici, na ktorú možno zaostriť zväzok rovnobežných lúčov s vlnovou dĺžkou  $\lambda_0 = 550$  nm vstupujúcich zrenicou do oka v smere optickej osi. Určte túto plôšku pre obidva medzné priemery zrenice a porovnajte ju s plochou šesťuholníkovej bunky.

*Pozn.: Pri sledovaní chodu lúčov cez šošovku si uvedomte, že na obidvoch stranách šošovky sú prostredia s rôznym indexom lomu, tzn. napríklad, že lúč prechádzajúci stredom šošovky sa láme podľa Snellovho zákona.*

#### **4. Circinus X-1**

Na konci roku 2013 zaznamenala orbitálna sonda Chandra vybavená teleskopom mohutný záblesk röntgenovej dvojhviezdy Circinus X-1 v súhvezdí južnej oblohy Circinus (Kružidlo).



Obr. A–4 Röntgenový obraz dvojhviezdy s vytváranými kruhmi (vľavo). V strede je obraz optického ďalekohľadu, vpravo je kompozícia oboch obrazov.

V nasledujúcich mesiacoch po výbuchu sa začali okolo hviezdy objavovať v röntgenovom spektre štyri sústredné prstence, obr. A–4.

Po uplynutí doby 80 dní mal vonkajší prstenec vzhľadom na spojnicu Zem–hviezda uhlový polomer  $\alpha = 13'$ . Ukazuje sa, že prstence vznikali rozptylom žiarenia na medzihviezdnom prachu. Pomocou austrálskeho rádioteleskopu Mopra, ktorý využíva absorpciu rádiového žiarenia s frekvenciou 115 GHz oxidu uhoľnatého, sa podarilo zistiť, že medzi hviezdou a Zemou existujú štyri prachové oblaky, ktoré majú tvar pomerne tenkých prachových vrstiev kolmých na spojnicu Zem–hviezda. Z analýzy rádiového žiarenia sa určila vzdialenosť prachovej vrstvy najbližšej k Zemi 15 300 ly.

- Z uvedených údajov určte vzdialenosť  $d$  neutrónovej hviezdy od Zeme v okamihu výbuchu. Výsledok vyjadrite v jednotkách kpc (kiloparsek). Odvoďte hodnotu konštanty prevodu jednotiek  $k = \text{kpc/ly}$ . Kedy došlo k výbuchu hviezdy v pozemskej časovej mierke?
- Prachový oblak, ktorý sa vytvoril zrejme po výbuchu niektorej supernovy, sa šíri v smere spojnice Zem – hviezda. Na rádiové mapovanie vesmíru sa využíva rádiové absorpčné spektrum plynu molekúl CO (oxid uhoľnatý). Frekvencia  $f_a$  absorpčnej čiary CO oblaku pozorovaná rádioteleskopom na Zemi je zvýšená voči frekvencii  $f_0 = 115 \text{ GHz}$  tejto absorpčnej čiary určenej v pozemskom laboratóriu o  $\Delta f = 12 \text{ MHz}$ . Určte veľkosť a smer rýchlosti  $v$  pohybu oblaku pozdĺž spojnice Zem–hviezda.

### 5. Doba vzniku Zeme

Už od antiky sa vedú diskusie o dobe vzniku, resp. stvorenia, Zeme. Súčasná vedecká predstava vychádza z metódy rádioaktívneho datovania veku meteoritov, o ktorých sa predpokladá, že vznikali súčasne so Slnecnou sústavou, pomocou rádioizotopov s dostatočne dlhým polčasom premeny. Pri datovaní vzniku Slnecnej sústavy a Zeme sa využívajú rôzne rádioizotopy, ktoré vznikli ešte pred vznikom Slnecnej sústavy a majú dostatočne dlhý polčas premeny. Vyhodnocuje sa potom výskyt produktov ich rádioaktívnej premeny. K najčastejším metódam datovania veku Zeme patrí sledovanie premeny uránu na olovo  $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$  ( $T_{1/2} = 4,47 \text{ Gyr}$ ),  $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$  ( $T_{1/2} = 0,704 \text{ Gyr}$ ). Pozn.: Gyr (gigayear) =  $10^9$  rokov.

- a) Uvedte rady produktov premeny izotopov uránu  $^{238}\text{U}$  a  $^{235}\text{U}$  na stabilné izotopy olova a pri každej premene určte, o akú premenu ide.

Na určenie veku Zeme sa použil kryštál  $\text{ZrSiO}_4$  (zirkón), ktorý pri kryštalizácii viaže atómy uránu, ale neprijíma atómy olova. Preto sa predpokladá, že pri vzniku kryštálov v kryštalickom zirkóne olovo nebolo. Stopy olova v kryštáloch v súčasnosti obsahujú olovo, ktoré vzniklo rádioaktívnou premenou. Vo vzorke sa určí pomer  $p_1$  počtu atómov  $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$  a  $p_2$  počtu  $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ .

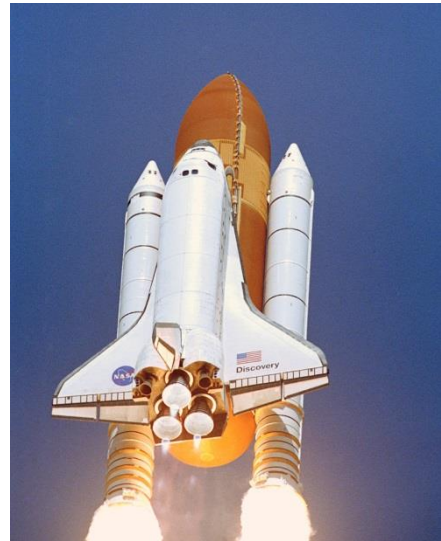
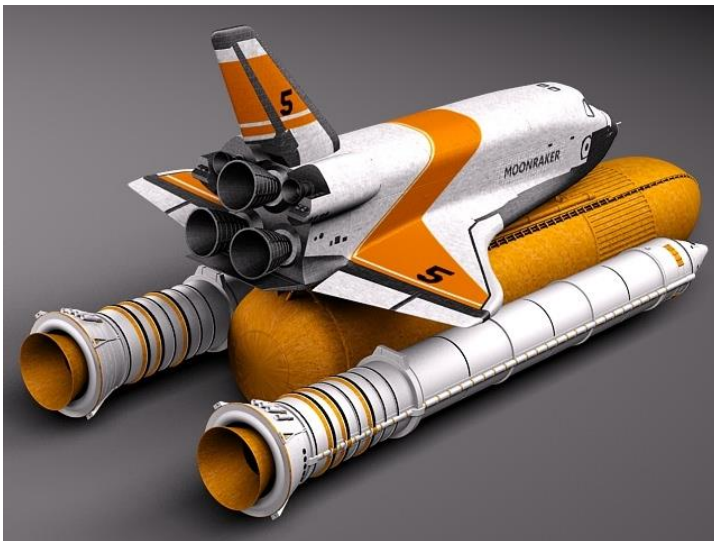
- b) Odvodte výraz pre závislosť pomeru  $p = p_1/p_2$  od času  $t$ .
- c) Zostrojte graf závislosti pomeru  $p$  od času  $t$  v intervale  $0 - 10$  Gyr. Z experimentálne určených pomerov  $p_1 = 1,79$  a  $p_2 = 138$  určte pomocou grafu čas od vzniku kryštálu zirkónu, ktorý približne zodpovedá veku Zeme.

*Pozn.: V roku 1995 americký geochemik Clair C. Patterson analyzoval pomocou U–Pb metódy vzorky meteoritov pochádzajúcich z obdobia formovania Zeme a dospel k veku Zeme 4,55 Gyr, ktorý sa v súčasnosti považuje za platnú hodnotu.*

## 6. Raketoplán

Raketoplán lieta zo Zeme na medzinárodnú stanicu ISS (International Space Shuttle), ktorá sa nachádza vo výške  $h = 360$  km nad povrchom Zeme.

- a) Určte rýchlosť v pohybu ISS na orbitálnej dráhe a dobu  $T$  obehu stanice okolo Zeme.



Obr. A–5 Raketoplán pri štarte s motormi SRB a nádržou ET na kvapalné palivo

Raketoplán poháňajú v začiatkovej fáze dva raketové motory na tuhé palivo SRB (Solid Rocket Booster), každý s ťahom  $F_1 = 11,8$  MN, a tromi motormi na tekuté palivo SSME (Space Shuttle Main Engines), každý s ťahom  $F_2 = 2,1$  MN, obr. A–5. Motory SRB obsahujú pri štarte každý  $m_1 = 500$  ton paliva. Motory SSME sú zásobované palivom z veľkej zavesenej valcovej nádrže ET (External Tank), v ktorej sa pri štarte nachádza  $m_H = 102,6$  tony vodíka a  $m_O = 616,5$  tony kyslíka. Palivo SRB sa spotrebuje za  $t_1 = 120$  s po štarte, ET sa vyprázdni za  $t_2 = 520$  s.

b) Určte priemerné výtokové rýchlosti  $v_1$  a  $v_2$  plynov z dýz motorov SRB a SSME.

Celková hmotnosť zostavy raketoplánu pri štarte je  $m_0 = 2\,050$  ton.

c) Určte zrýchlenie  $a_0$  raketoplánu pri štarte a čas  $t_0$ , za ktorý zostava vystúpi do výšky  $h_0 = 60$  m štartovacej veže.

Raketoplán po štarte stúpa takmer vertikálne, aby prekonal hustú atmosféru po najkratšej dráhe. Na raketoplán pôsobia sily ťahu motorov, tiažová sila a sila odporu vzduchu. Mení sa však hmotnosť zostavy a taktiež hustota vzduchu. Podobné úlohy sa riešia s úspechom numericky.

d) Zostavte rovnice pre malé zmeny (prírastky)  $\Delta v$  rýchlosti pohybu a  $\Delta h$  výšky raketoplánu za malý časový interval (krok)  $\Delta t$ . Pomocou týchto rovníc modelujte krok po kroku pohyb na počítači (napr. v programe MS EXCEL). Zostrojte grafy výšky  $h$  a rýchlosti  $v$  raketoplánu ako funkcie času  $t$  a grafy rýchlosti  $v$  a zrýchlenia  $a$  raketoplánu ako funkcie výšky  $h$ . Určte výšku  $h_z$ , v ktorej raketoplán dosiahne rýchlosť zvuku 330 m/s, výšku  $h_1$ , v ktorej sa vypnú motory SRB, rýchlosť  $v_1$  a zrýchlenie  $a_1$  pohybu raketoplánu v okamihu vypnutia motorov SRB.

V časti d) uvažujte aerodynamický odpor  $F_o = k v^2$ , kde  $k = k_0 (\rho/\rho_0)$ . Hustota vzduchu sa mení s výškou podľa vzťahu  $\rho = \rho_0 \exp(-h/\delta)$ , kde  $\rho_0 = 1,23 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\delta = 8,70 \text{ km}$ ,  $k_0 = 100 \text{ N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2}$ .

Tiažové zrýchlenie považujte za konštantné  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  v rozsahu výšky pohybu.

*Pozn.: Po vypnutí motorov SRB a ich odhodení zostávajú v činnosti motory SSME až do vyhorenia paliva v čase 520 s a odhodení ET. V tom čase sa dostáva raketoplán na orbitálnu dráhu.*

*Pozn.: V jednotlivých krokoch sa pohyb považuje za rovnomerne zrýchlený. Dĺžku intervalu  $\Delta t$  je vhodné prispôbovať priebehu zmien. Pri pomalých zmenách stačí dlhší interval, v časti rýchlejších zmien je vhodné interval skrátiť, napr. prvú sekundu rozdeliť na 10 častí, prípadne prvú desatinu sekundy na 10 častí, po prvej sekunde zvoliť interval 1 s až do 120 s prvej fázy letu.*

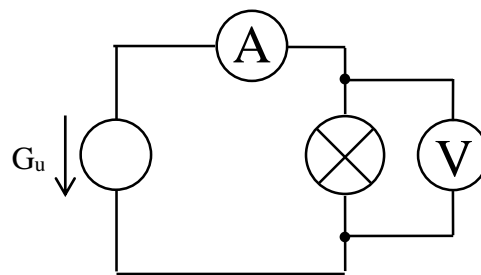


Obr. A-6 Profil letu raketoplánu od štartu do pristátia

## 7. Odpor vlákna žiarovky – experimentálna úloha

Vlákno žiarovky predstavuje nelineárny rezistor.

a) V zapojení podľa schémy na obr. A-7 merajte hodnoty prúdu  $I$  ampérmetra a napätia  $U$  voltmetra v rozsahu napätia 0 až  $U_n$ , kde  $U_n$  je nominálne napätie žiarovky. V danom rozsahu nastavte najmenej 20 hodnôt napätia. Namerané hodnoty zapíšte do tabuľky. Na meranie použijete digitálne multimetre a regulovaný laboratórny zdroj  $G_u$  konštantného napätia.



Obr. A-7

b) Zostrojte graf funkcie  $I = f(U)$ , A-V charakteristiku žiarovky.

c) Pre jednotlivé hodnoty prúdu určte odpor  $R$  a príkon  $P$  žiarovky. Hodnoty  $R$  a  $P$  zapíšte do tabuľky k nameraným hodnotám.

d) S použitím vzťahu pre odpor žiarovky ako funkcie teploty  $T$ :  $R = R_0 (1 + \alpha \Delta T)$ , kde  $\alpha = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  a  $\Delta T = T - T_0$ , určte teplotu  $T$  vlákna žiarovky pre jednotlivé hodnoty napätia. Teplotu  $T$  a teplotu  $T_0$  miestnosti uveďte v kelvinoch.

e) Pri vyšších teplotách, kedy žiarovka podstatnú časť príkonu vyžiari, sa uplatní Stefan Boltzmannov zákon, podľa ktorého je vyžiarený výkon priamo úmerný  $T^4$ . Zostrojte vhodný graf pre veličiny  $P$  a  $T$ , tak aby ste mohli overiť závislosť  $P = k T^4$ . Z grafu určte rozsah prúdu  $I$ , pre ktorý uvedená závislosť platí, a určte hodnotu konštanty  $k$ .

f) S použitím Wienovho posuvného zákona určte vlnovú dĺžku  $\lambda_1$  maxima spektrálnej hustoty žiarivého výkonu žiarovky pri nominálnej hodnote napätia  $U_n$ . Určte hodnotu  $\lambda_2$  tohto maxima pri poklese napätia žiarovky na hodnotu 80%  $U_n$ .

Na meranie odporúčame použiť automobilovú žiarovku „12V 10W SV8,5-43 d-11mm sufit“, obr. A-8.



Obr. A-8

(ďalšie informácie na <http://fo.uniza.sk> a [www.olympiady.sk](http://www.olympiady.sk))

---

## 56. ročník Fyzikálnej olympiády – Úlohy domáceho kola kategórie A

Autori úloh: Ivo Čáp (1, 2, 3, 6, 7), Aba Teleki, (4), Ľubomír Konrád a Ivo Čáp (5)

Recenzia a úprava: Daniel Klivanec, Ľubomír Mucha

Redakcia: Ivo Čáp

Slovenská komisia fyzikálnej olympiády

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015