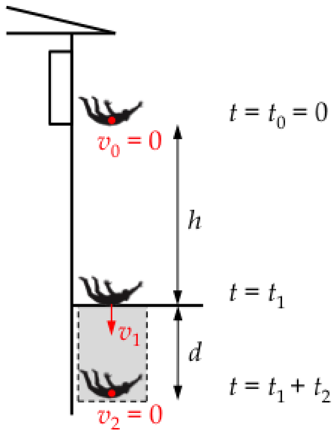
57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória D – domáce kolo
Riešenie úloh – 1. časť

1. *Skok do snehu*

Riešenie:

a) Skok Petra do snehu zjednodušíme ako voľný pád jeho ťažiska s nulovou začiatočnou rýchlosťou. Prvá fáza jeho pohybu je voľný pád až po jeho dopad na povrch snehovej vrstvy. Druhú fázu, zabáranie do snehu, až po zastavenie pohybu, považujeme za rovnomerne spomalený pohyb. Obe fázy pohybu majú zvislú trajektóriu. 2b



Obr. RD-1

b) Na Petra v prvej fáze skoku pôsobí len gravitačná sila. Potom platí

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 ,\; v_1 = g t_1 .$$

Z tejto sústavy máme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} ,\; v_1 = \sqrt{2gh} .$$

Pre dané hodnoty veličín $v_1 \approx 8{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t_1 \approx 0{,}90$ s. 2b

c) Zrýchlenie Petra počas fázy pohybu v snehu určíme pomocou druhého pohybového zákona. Peter sa zabára do snehu, jeho rýchlosť sa zmenšuje a jeho zrýchlenie a_2 smeruje zvisle nahor. Tiež zjednodušene predpokladáme, že tento jeho pohyb je rovnomerne spomalený. Preto platí

$$d = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 ,\; 0 = v_1 - a_2 t_2 .$$

Z tejto sústavy vyjadríme $t_2 = 2d / v_1$, $a_2 = v_1^2/(2d)$.
Po dosadení za v_1 máme pre veľkosť zrýchlenia pri pohybe Petra v snehu

$$a_2 = g\frac{h}{d} . \qquad (1)$$

Podobne získame vzťah pre čas t_2 pohybu v snehu

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{d}{h}} .$$

Pre dané hodnoty veličín $a_2 \approx 49\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $t_2 \approx 0{,}18$ s. 2b

d) Počas pohybu v snehu pôsobí na Petrovo telo zvisle dolu gravitačná sila veľkosti $F_g = mg$ a smerom hore tlačí sneh tlakovou silou veľkosti F_{tl}. Výslednica týchto síl smeruje nahor a jej veľkosť F je daná rozdielom veľkostí tlakovej a gravitačnej sily.
Podľa 2. pohybového zákona

$$F = F_{tl} - mg = ma_2 .$$

Do tohto výrazu dosadíme za zrýchlenie a_2 výraz (1), pre tlakovú silu dostaneme

$$F_{\text{tl}} = mg\left(\frac{h}{d}+1\right).$$

Preťaženie, ako sme ho v texte definovali, ktoré musí Peter prekonať, potom je

$$a_{\text{p}} = g\left(\frac{h}{d}+1\right).$$

Pre dané hodnoty veličín máme $a_{\text{p}} = 6\,g$. 3b

Toto preťaženie nie je nebezpečné, hoci nie je príjemné. Podobne veľkým preťaženiam sú vystavení astronauti pri štarte kozmickej lode. Napriek tomuto záveru skrýva skok do snehu mnoho iných nebezpečenstiev (skryté predmety pod snehom a pod.), vzhľadom na ktoré nie je možné skok do snehu považovať za rozumný čin.

e) Ak do vzťahu pre zrýchlenie dosadíme $a_{\text{p}} = 2g$ a vyjadríme d, dostaneme $d = h$. Teda Peter by musel brzdiť na rovnako dlhej dráhe, ako je dráha jeho voľného pádu. 1b

2. *Gravitačné zrýchlenie Slnka*

Riešenie:

Na teleso s hmotnosťou m, ktoré sa nachádza na povrchu Slnka (s hmotnosťou M_S a polomerom R_S), pôsobí smerom do stredu Slnka gravitačná sila

$$m\,g_S = G\frac{m\,M_S}{R_S^2}. \qquad 2\text{b}$$

Pre gravitačné zrýchlenie $\boldsymbol{g}_S$ na povrchu Slnka z tohto výrazu máme

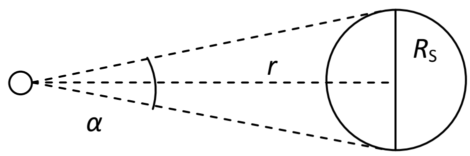
$$g_S = G\frac{M_S}{R_S^2}. \qquad (1) \qquad 1\text{b}$$

Polomer Slnka určíme, ak vychádzame z obr. RD-2 pomocou obrázku. Zrejme platí

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{R_S}{r} \approx \frac{\alpha}{2}\text{, odkiaľ } R_S \approx r\frac{\alpha}{2}. \qquad (2) \qquad 2\text{b}$$

Pre pohyb Zeme okolo Slnka platí

$$G\frac{M_Z M_S}{r^2} = M_Z\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r. \qquad 2\text{b}$$



Obr. RD-2

Úpravou z tohto výrazu určíme hmotnosť Slnka

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \qquad (3) \qquad 1\text{b}$$

Dosadíme do (1) za R_S a M_S výrazy (2) a (3), dostaneme

$$g_S = \frac{16\pi^2 r}{T^2\alpha^2} \approx 273{,}8\ \text{m/s}^2 \approx 28 \cdot g_Z. \qquad 2\text{b}$$

3. Plávajúca bója

Riešenie:

Na bóju s reťazou pôsobí tiažová a vztlaková sila. Označme M hmotnosť bóje, h_1 hĺbku ponoru bóje na začiatku a h_2 hĺbku ponoru bóje po stúpnutí hladiny. Pre silu pôsobiacu na bóju a zvislú časť reťaze v prvom, resp. druhom prípade platí

$$Mg + \frac{2}{3}mg = h_1 S\,\rho_0\,g + \frac{2}{3}\frac{m}{\rho}\rho_0\,g\,, \qquad \text{1b}$$

$$Mg + mg = h_2 S\,\rho_0\,g + \frac{m}{\rho}\rho_0\,g\,. \qquad \text{1b}$$

Z týchto rovníc vyjadríme h_1 a h_2.
Pre rozdiel ponoru bóje v oboch prípadoch potom máme

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{m}{3S}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right). \qquad \text{4b}$$

Pre hodnotu x, o ktorú stúpla hladina, platí

$$x = \frac{d}{3} + \Delta h\,. \qquad \text{1b}$$

Dĺžka reťaze je potom

$$d = 3(x - \Delta h) = 3\left[x - \frac{m}{3S}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)\right]. \qquad \text{3b}$$

4. Rekordný skok Jesse Owensa

Riešenie:

a) Skok budeme riešiť v sústave súradníc (x,y), kde x je vodorovná súradnica v smere pohybu a y zvislá súradnica orientovaná zvislo nahor. Na teleso vrhnuté šikmo nahor pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{g}$, ktorá mu udelí v zvislom smere zrýchlenie $a_y = -g$. Pohyb sa skladá z rovnomerne zrýchleného pohybu v zvislom smere s rýchlosťou $v_y = v_2 - g\,t$ a rovnomerného pohybu vo vodorovnom smere s rýchlosťou $v_x = v_1$.
Polohu ťažiska skokana v čase t vyjadrujú súradnice

$$y = v_2\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad \text{a} \qquad x = v_1\,t\,.$$

Najvyšší bod trajektórie dosiahne, keď $v_y = 0$, odkiaľ máme čas $t_1 = v_2/g$. V tomto čase je výška ťažíska

$$y_1 = h = \frac{v_2^2}{2g}\,. \qquad (1) \qquad \text{1b}$$

V okamihu dopadu je výška $y = 0$, odkiaľ máme $t_2 = 2\,v_2/g$. Doskok je potom vo vzdialenosti

$$x_2 = d = \frac{2\,v_1\,v_2}{g}\,. \qquad (2) \qquad \text{1b}$$

b) Zo vzťahov (1) a (2) máme

$$v_2 = \sqrt{2gh} \qquad \text{a} \qquad v_1 = \frac{g\,d}{2v_2} = \frac{g\,d}{2\,\sqrt{2g\,h}} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

Veľkosť rýchlosti skokana v okamihu odrazu

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\frac{d^2 g}{8h} + 2g\,h} = \sqrt{2g\,h}\,\sqrt{1 + \frac{d^2}{16\,h^2}}\,,$$

pre dané hodnoty $v_0 \approx 9{,}51$ m/s. 1b

Pre začiatočný uhol skoku platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4h}{d}\text{, pre dané hodnoty } \mathrm{tg}\alpha \approx\ 0{,}593 \text{ a teda } \alpha \approx 30{,}7°.$$ 1b

c) Tiažová sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ pozostáva z gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$, ktorá smeruje do stredu Zeme, a zotrvačnej sily v dôsledku rotácie Zeme $\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}$ s veľkosťou $F_{\mathrm{z}} = m\,\omega^2 r$ (ω uhlová rýchlosť rotácie, r vzdialenosť od osi rootácie), ktorá smeruje kolmo od osi. Keďže zemepisná šírka Melbourne (pribl. 37,8° južnej šírky) je menšia ako zemepisná šírka Berlína (pribl. 52,5° severnej šírky), je zotrvačná zložka tiažovej sily v Melbourne väčšia. Tiažové zrýchlenie môže byť ovplyvnené aj zložením zemskej kôry v danom mieste a nepravidelnosťou tvaru zemského telesa (geoidu). 2b

d) Pri daných hodnotách v_0 a α je $v_1 = v_0 \cos\alpha$ a $v_2 = v_0 \sin\alpha$. Dĺžka skoku je potom

$$d = \frac{2\,v_1\,v_2}{g} = \frac{2\,v_0^2}{g}\cos\alpha\,\sin\alpha\,.$$ 2b

Pre dve rôzne hodnoty g tak máme

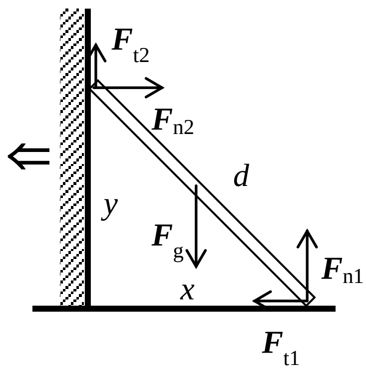
$$\Delta d = \ 2\,v_0^2\,\cos\alpha\,\sin\alpha\left(\frac{1}{g_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{g_{\mathrm{B}}}\right) = \frac{2\,v_0^2}{g_{\mathrm{B}}}\cos\alpha\,\sin\alpha\,\frac{g_{\mathrm{B}} - g_{\mathrm{M}}}{g_{\mathrm{M}}} = d\ \frac{g_{\mathrm{B}} - g_{\mathrm{M}}}{g_{\mathrm{M}}}\,.$$

Pre dané hodnoty $\Delta d \approx 1{,}06$ cm. 2b

5. *Zošmyknutie dosky*

Riešenie:

a) V ťažisku v strede dosky pôsobí na dosku tiažová sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$. Sila v mieste dotyku dosky s podlahou (pôsobenie podlahy na dosku) má zložku kolmú (prítlačnú) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n1}}$ a dotyčnicovú (treciu) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t1}}$. Sila v mieste dotyku dosky so stenou (pôsobenie steny debny na dosku) má kolmú zložku (prítlačnú) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n2}}$ a dotyčnicovú (treciu) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t2}}$, obr. RD–3. 2b



Obr. RD–3

b) Ak vzdialenosť x nie je veľká, doska stojí opretá o stenu. Voľnému zošmyknutiu dosky bráni sila statického trenia

$$F_{\mathrm{t1}} \le f_1\,F_{\mathrm{n1}}. \qquad (1)$$ 2b

Nerovnosť (1) je určujúca podmienka pre zachovanie statickej polohy dosky opretej o stenu debny.

Keď sa začne stena pohybovať, horný koniec dosky sa šmýka po stene smerom nadol. Proti smeru tohto pohybu pôsobí smerom nahor sila šmykového trenia

$F_{t2} = f_2\, F_{n2}$. (2)

Pri pomalom pohybe debny, a teda zanedbateľnom zrýchlení, platia podmienky statickej rovnováhy dosky. Výsledná sila $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na dosku, je nulová, tzn. nulovú hodnotu súčet síl pôsobiacich na dosku v smere x, aj súčet síl v smere y

$$F_{n2} - F_{t1} = 0 \qquad (3) \qquad 1b$$

$$F_g - F_{n1} - F_{t2} = 0\,. \qquad (4) \qquad 1b$$

V stave statickej rovnováhy je nulový moment všetkých síl pôsobiacich na dosku vzhľadom na ľubovoľnú os kolmú na zvislú rovinu dosky. Napr. vzhľadom na os prechádzajúcu dolným koncom dosky

$$F_g \frac{x}{2} - F_{t2}\, x - F_{n2}\, y = 0\,, \qquad (5)$$

kde $y = \sqrt{d^2 - x^2}$ je vzdialenosť horného konca dosky od podlahy.

Rovnosť (5) upravíme použitím (2) a (3) a vyjadríme silu F_{t1}

$$F_{t1} = \frac{F_g}{2} \frac{x}{f_2 x + y}\,. \qquad (6) \qquad 1b$$

Pre posúdenie podmienky (1) vyjadríme F_{n1} z rovníc (2) až (4)

$$F_{n1} = F_g - f_2\, F_{t1}$$

a po dosadení výsledku (6)

$$F_{n1} = F_g - \frac{F_g}{2} \frac{f_2\, x}{f_2 x + y} = \frac{F_g}{2} \frac{f_2 x + 2y}{f_2 x + y}\,. \qquad 1b$$

Podmienka stability (1) má tvar

$$\frac{F_g}{2} \frac{x}{f_2 x + y} \le f_1 \frac{F_g}{2} \frac{f_2 x + 2y}{f_2 x + y}, \text{ tzn. } \left(1 - f_1 f_2\right) x \le 2 f_1 \sqrt{d^2 - x^2}\,.$$

Po umocnení nerovnice na druhú dostaneme podmienku stability

$$x \le \frac{2 f_1}{\sqrt{\left(1 - f_1 f_2\right)^2 + 4 f_1^2}}\, d = x_m\,.$$ Pre dané hodnoty $x_m \approx 92{,}2$ cm. 2b

6. *Odraz s trením*

Riešenie:

Pred nárazom o stenu prejde teliesko dráhu $s_1 = \dfrac{h_0}{\sin\alpha}$.

Po náraze prejde teliesko dráhu $s_2 = \dfrac{k\, h_0}{\sin\alpha}$.

1) riešenie

V smere naklonenej roviny pôsobí na teliesko zložka tiažovej sily $F_{gt} = mg \sin\alpha$. Na teliesko pôsobí v smere kolmom na naklonenú rovinu tlaková sila naklonenej roviny s veľkosťou rovnou normálovej zložke tiažovej sily $F_N = mg \cos\alpha$. Proti smeru pohybu pôsobí sila trenia $F_t = f\, F_N = f\, mg \cos\alpha$. Zrýchlenie pohybu telieska pri pohybe nadol po naklonenej rovine je potom $a_1 = g \sin\alpha - f\, g \cos\alpha$.

Na dráhe s_1 dosiahne teliesko rovnomerne zrýchleným pohybom rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2a_1\, s_1} = \sqrt{2\, g\, h_0\left(1 - f\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}\,.$$ 1b

Po dokonale pružnom odraze má teliesko rovnakú začiatočnú rýchlosť v_1 a pohybuje sa smerom nahor po naklonenej rovine so zrýchlením $a_2 = -g\,\sin\alpha - f\,g\,\cos\alpha$.
Teliesko zastane po prejdení dráhy

$$s_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\,\frac{h_0}{\sin\alpha} = \frac{k\,h_0}{\sin\alpha}\,.$$ 1b

Z toho úpravou určíme faktor trenia

$f = \dfrac{(1-k)\sin\alpha}{(k+1)\cos\alpha} = \dfrac{1-k}{1+k}\,\mathrm{tg}\alpha$. Pre dané hodnoty $f \approx 0{,}082$. 3b

b) Pri pohybe nadol dosiahne teliesko rýchlosť v_1 za čas

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = \sqrt{\frac{2h_0}{g\sin\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha}}\,.$$ 1b

Pri pohybe nahor je čas so zastavenia

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \sqrt{\frac{2h_0}{g\sin\alpha}}\,\frac{\sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha}}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\,.$$ 1b

Po dosadení za faktor trenia je celkový čas

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g\sin\alpha}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha}} + \frac{\sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha}}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\right].$$

Pre dané hodnoty $t_0 \approx 1{,}53$ s. 3b

Pozn.: Výraz možno upraviť aj na jednoduchší tvar

$$t_0 = \sqrt{\frac{8h_0\sin\alpha}{g}}\;\frac{\sqrt{\sin\alpha - f\cos\alpha}}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}\,.$$

2. spôsob riešenia časti a)

Pri pohybe nadol a nazad sa zmení potenciálna energia

$$\Delta E_\mathrm{p} = mg\,kh_0 - mg\,h_0\,.$$

Záporná zmena potenciálnej energie je rovná práci sily trenia $W = f\,mg\cos\alpha\,(s_1 + s_2)$

Odtiaľ máme

$$-\Delta E_\mathrm{p} = mg\,h_0 - mg\,kh_0 = f\,mg\cos\alpha\left(\frac{h_0}{\sin\alpha} - \frac{k\,h_0}{\sin\alpha}\right)$$

a faktor trenia $f = \dfrac{1-k}{1+k}\,\mathrm{tg}\alpha$.

Za časť a) spolu len 5b za jeden alebo obidva postupy riešenia.

Plastelína – *Experimentálna úloha*

Možné riešenie:

1.spôsob
Z plastelíny vymodelujeme kocku. Jej rozmery určíme pomocou milimetrového papiera. Tak určíme objem kúska plastelíny. Potom z tohto kúska plastelíny vymodelujeme „loďku“. Tvarujeme ju tak, aby pri vložení do pohára s vodou jej horný okraj dosahoval hladinu vody. Zmeraním jej vonkajších rozmerov potom zistíme, koľko vody loďka vytlačí. Z toho potom vieme určiť hmotnosť a hustotu plastelíny.

2.spôsob
Uvedieme aj spôsob využívajúci obidva poháre (treba vziať poháre s rôznymi priemermi). Nepriehľadný pohár vložíme do priehľadného, ktorý je naplnený vodou. Nadbytočná voda vytečie cez okraj z väčšieho pohára. Vyberieme menší pohár a určíme výšku hladiny vody, ktorá zostane v priehľadnom pohári. Potom vložíme kúsok plastelíny do nepriehľadného pohára a ten opatrne opäť vložíme do druhého pohára s vodou. Vyleje sa ďalšia voda. Opäť vyberieme nepriehľadný pohár a určíme výšku hladiny vody, ktorá zostane v priehľadnom pohári. Na základe tohto merania potom určíme hmotnosť a hustotu kúska plastelíny.

3.spôsob
Kúsok plastelíny najskôr držíme na niti vo vode vnútri plávajúceho menšieho pohára (musí byť celý ponorený vo vode). Potom plastelínu pustíme na dno tohto pohára. Odmeriame dve zmeny hĺbky ponoru. Pomocou milimetrového papiera určíme obsah priečneho rezu pohára. Pomocou získaných údajov určíme hmotnosť kúska plastelíny.

---

57. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie D*

Autori úloh:	Slavomír Tuleja (1), Ľubomír Konrád (2 až 7)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Slavomír Tuleja
Preklad textu do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ľubomír Konrád Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016