57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória A – krajské kolo
riešenie úloh

1. *Náraz tyče*

a) Počas otáčavého pohybu tyče okolo osi zo začiatočnej vodorovnej polohy do zvislej polohy koná prácu iba tiažová sila, a preto sa zachováva mechanická energia, tzn. získaná kinetická energia je rovná poklesu potenciálnej energie. Pri náraze tyče do guľôčky pôsobí na sústavu tyče a guľôčky vonkajšia sila reakcie v osi otáčania, a teda nie sú splnené podmienky zákona zachovania hybnosti. Keďže moment vonkajšej sily reakcie vzhľadom na os otáčania tyče je nulový, je splnená podmienka platnosti zákona zachovania momentu hybnosti vzhľadom na os otáčania O. Pri pružnej zrážke sa zachováva mechanická energia sústavy, a keďže je pred zrážkou a po nej rovnaká potenciálna energia, je rovnaká aj kinetická energia sústavy tesne pred zrážkou a tesne po nej. Nárazom získa guľôčka určitú rýchlosť a začne sa na vlákne pohybovať po kružnicovom oblúku. Vlákno je napínané radiálnou zložkou tiažovej sily a silou zotrvačnou. Výslednica týchto síl je maximálna v zvislej polohe vlákna, tzn. tesne po zrážke. Ak sa vlákno nepretrhne v tejto kritickej polohe, po vychýlení zo zvislého smeru sa už tiež nepretrhne. 2b

b) Tyč sa otáča okolo pevnej osi. Kinetická energia v zvislej polohe je rovná poklesu potenciálnej energie

$$\frac{1}{2} I\,\omega_0^2 = M\,g\,\frac{a}{2}\text{, odkiaľ } \omega_0 = \sqrt{\frac{M\,g\,a}{I}}\text{, kde } I = \frac{1}{3} M\,a^2. \qquad (1)$$

V okamihu tesne pred zrážkou má tyč uhlovú rýchlosť ω_0, ihneď po zrážke ω, a guľôčka má rýchlosť v. Pri zrážke tyče a guľôčky vychádzame zo zákona zachovania energie a zákona zachovania momentu hybnosti

$$\frac{1}{2} I\,\omega_0^2 = \frac{1}{2} I\,\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$I\,\omega_0 = I\,\omega + m v b$$

Obidve rovnice upravíme na tvar

$$I\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = m v^2 \quad \text{a} \quad I\left(\omega_0 - \omega\right) = m v b.$$

Ak delíme prvú rovnicu druhou, dostaneme rovnicu $\omega_0 + \omega = \dfrac{v}{b}$.

Odtiaľ máme sústavu dvoch lineárnych rovníc

$$\omega_0 - \omega = \frac{m b}{I} v \qquad \text{a} \qquad \omega_0 + \omega = \frac{v}{b}.$$

Z obidvoch rovní a výrazu (1) určíme okamžitú rýchlosť v guľôčky po zrážke

$$v = \frac{2 I b}{I + m b^2}\,\omega_0 = \frac{2 M a b}{M a^2 + 3 m b^2}\sqrt{3 g a}. \qquad (2) \qquad 2b$$

Okamžitá rýchlosť v guľôčky po zrážke je funkciou (2) dĺžky b vlákna. Maximum v_m rýchlosti určíme pomocou nulovej hodnoty prvej derivácie

$$\frac{dv}{db} = \frac{I + mb^2 - b(2mb)}{\left(I + mb^2\right)^2}\, 2I\,\omega_0 = 0\,,$$

odkiaľ určíme dĺžku b_{m} vlákna, pri ktorej po zrážke je rýchlosť guľôčky v_{m}

$$b_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{I}{m}} = a\sqrt{\frac{M}{3m}}\,, \text{ pričom } v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{I}{m}}\,\omega_0 = \sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{g\,a}\,. \qquad 2\text{b}$$

Pre dané hodnoty $b_{\mathrm{m}} \approx 59$ cm, $v_{\mathrm{m}} \approx 3{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

c) Guľôčka sa pohybuje po zrážke po kružnici s polomerom b. V dolnej polohe je vlákno napínané silou

$$F = mg + m\frac{v^2}{b} = mg + m\,4I\,M\,g\,a\frac{b}{\left(I + mb^2\right)^2}\,. \qquad 2\text{b}$$

Sila F je funkciou dĺžky b vlákna. Maximálna hodnota sily je daná nulovou deriváciou

$$\frac{dF}{db} = 4mI\,M\,g\,a\frac{\left(I + mb^2\right)^2 - 4mb^2\left(I + mb^2\right)}{\left(I + mb^2\right)^4} = 0\,.$$

Z nulovej hodnoty čitateľa máme hodnotu

$$b_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{I}{3m}} = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{M}{m}}\,, \text{ pre dané hodnoty } b_{\mathrm{p}} \approx 34 \text{ cm}. \qquad 1\text{b}$$

Pre túto hodnotu máme

$$F_{\max} = mg\left(1 + \frac{9}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}\right). \text{ Pre dané hodnoty } F_{\max} \approx 3{,}2 \text{ N}. \qquad 1\text{b}$$

Vlákno sa nepretrhne, ak je jeho pevnosť $F_{\mathrm{p}} > F_{\max} \approx 3{,}2$ N.

2. Elektrické vedenie

a) Vstupná impedancia $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{vst}} = \boldsymbol{Z}_0$ obvodu s pripojenou záťažou $\boldsymbol{Z}_0$

$$\boldsymbol{Z}_0 = \mathrm{j}\omega L/2 + \frac{\left(\mathrm{j}\omega L/2 + \boldsymbol{Z}_0\right)\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\mathrm{j}\omega L/2 + \boldsymbol{Z}_0 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\,.$$

Výraz môžeme upraviť napr.

$$\left(\boldsymbol{Z}_0 - \mathrm{j}\omega L/2\right)\left(\mathrm{j}\omega L/2 + \boldsymbol{Z}_0 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) = \left(\mathrm{j}\omega L/2 + \boldsymbol{Z}_0\right)\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\,,$$

odkiaľ po úprave máme

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right)}\,. \qquad 1\text{b}$$

Kritická uhlová frekvencia ω_{k}, resp. kritická frekvencia f_{k},

$$\omega_k = \frac{2}{\sqrt{LC}}\,, \text{ resp. } f_k = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \text{ Pre dané hodnoty } f_{\mathrm{k}} \approx 514 \text{ MHz}. \qquad 1\text{b}$$

Pre $f < f_{\mathrm{k}}$ je charakteristická impedancia reálna

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)}\,.$$ 0,5b

Pre veľmi nízke frekvencie $f << f_k$ máme

$$Z_0 \approx R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$. Pre dané hodnoty $R_0 \approx 52\ \Omega$. 1b

Pre $f > f_k$ je charakteristická impedancia imaginárna

$$\boldsymbol{Z}_0 = \mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}\left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2}-1\right)} = \mathrm{j}\,X_0\text{, kde}\quad X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}\left(\frac{\omega^2}{\omega_k^2}-1\right)} = \frac{\omega L}{2}\sqrt{1-\frac{\omega_k^2}{\omega^2}}\,.$$ 0,5b

Pre frekvencie $f >> f_k$ máme

$\boldsymbol{Z}_0 \approx \mathrm{j}\,\omega\,\dfrac{L}{2}$, tzn. $L_0 \approx L/2$. Pre dané hodnoty $L_0 \approx 32$ nH. 1b

b) Pre prvý delič napätia (obr. A–2a) máme

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{Z}_0} = \frac{\boldsymbol{U}_3}{\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}\text{, a teda}\quad \frac{\boldsymbol{U}_3}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}{\boldsymbol{Z}_0}\,.$$

Pre druhý delič napätia

$$\boldsymbol{I}_3 = \frac{\boldsymbol{U}_3}{\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{X}_\mathrm{L}} = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{Z}_0}\text{, a teda}\quad \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_3} = \frac{\boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}\,.$$

Odtiaľ máme

$$\boldsymbol{A}_{U0} = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\boldsymbol{U}_3}{\boldsymbol{U}_1}\frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_3} = \left(\frac{\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}{\boldsymbol{Z}_0}\right)\left(\frac{\boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}\right) = \frac{\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{X}_\mathrm{L}}{\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{X}_\mathrm{L}} = \frac{\boldsymbol{Z}_0 - \mathrm{j}\omega L/2}{\boldsymbol{Z}_0 + \mathrm{j}\omega L/2}\,.$$ 1b

c) Pre $f < f_k$, a teda $\boldsymbol{Z}_0 = Z_0$ (reálne) máme

$$\boldsymbol{A}_{U0} = \frac{Z_0 - \mathrm{j}\omega L/2}{Z_0 + \mathrm{j}\omega L/2}\text{, a teda}\quad A_{U0} = \sqrt{\frac{Z_0^2 + (\omega L/2)^2}{Z_0^2 + (\omega L/2)^2}} = 1,$$ 0,5b

tzn. veľkosť napätia sa na úseku nemení.

Fázové posunutie

$$\varphi_{U0} = -2\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{2Z_0} = -2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4-\omega^2 LC}}\,. \qquad (1)$$ 0,5b

Pre $f > f_k$, a teda $\boldsymbol{Z}_0 = \mathrm{j}\,X_0$,

$$\boldsymbol{A}_{U0} = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{X_0 - \omega L/2}{X_0 + \omega L/2} = -\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}$$ (záporné reálne číslo)

odtiaľ $$\left|\boldsymbol{A}_{U0}\right| = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} < 1,$$ 0,5b

tzn. veľkosť napätia na úseku poklesne.

Fázové posunutie $\varphi_{U0} = \pi$ rad. 0,5b

c) Výstupné napätie prvého úseku je vstupným napätím druhého atď. Celkový napäťový prenos

$$A_{UN} = (A_{U0})^{N} = \left(\frac{Z_0 - j\omega L/2}{Z_0 + j\omega L/2} \right)^{N}.$$

Aby bola vlna netlmená, musí byť veľkosť A_{UN} prenosu rovná jednej, čo je splnené iba ak je impedancia Z_0 reálna, tzn. $f < f_k$. Vtedy $|A_{UN}| = 1$. 1b

Pre $f > f_k$ je $|A_{UN}| = |A_{U0}|^N << 1$, tzn. napäťová vlna je tlmená.

Pre veľmi nízke frekvencie $f << f_k$ máme pre $\omega^2 L C << 4$

$$\varphi_{U0} \approx -\omega\sqrt{LC}.$$

O vzdialenosť a sa vlna posunie za čas $\Delta t = a/c$, čo zodpovedá zmene fázy $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$. Rýchlosť vlny je rýchlosť posúvania miesta s konštantnou fázou. Po posunutí vlny o dĺžku a úseku tak zmena fázy $\Delta\varphi$ kompenzuje rozdiel fázy výstupného a vstupného napätia úseku $\Delta\varphi = -\varphi_{U0}$.

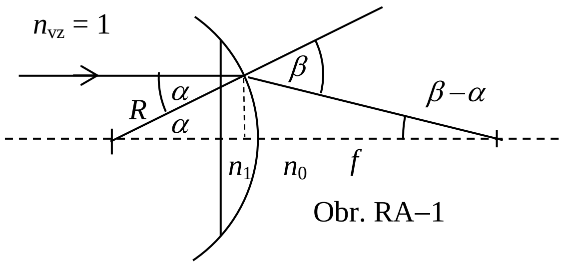
Pre $f << f_k$ je potom

$$c = \frac{a}{\Delta t} = \frac{a}{\varphi}\omega = a\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{L^* C^*}}.$$ Pre dané hodnoty $c \approx 1{,}6\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 1b

3. *Šošovka*

a) Lúč dopadajúci na šošovku rovnobežne s optickou osou sa láme do ohniska, obr. RA–II–3. Na guľovej ploche sa lúč láme podľa zákona lomu

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_0},\ \text{približne}\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n_1}{n_0}$$



Obr. RA–1

Z geometrie lúča máme

$$R\sin\alpha = f\ \mathrm{tg}(\beta-\alpha)$$ a približne

$$R\,\alpha = f\,(\beta-\alpha).$$ obrázok 1b

Odtiaľ obrazová ohnisková vzdialenosť

$$f = R\frac{n_0}{n_1 - n_0},$$ pre dané hodnoty $f \approx 74$ cm. (1) 2b

Aby bola stopa minimálna, musí byť hĺbka vody v nádobe rovná ohniskovej vzdialenosti $h_0 = f$ (senzor bude v ohniskovej rovine zobrazenia).

b) Obsah plochy senzora S delíme počtom pixlov a máme obsah S_1 plochy pripadajúcej na jeden pixel. Dĺžka štvorcovej strany pixla

$$a = \sqrt{\frac{S}{N}},$$ pre dané hodnoty $a \approx 6{,}1$ μm. 2b

c) Pri difrakcii na štrbine so šírkou d je uhol hlavného maxima $\Delta\varepsilon \approx \lambda/d$, pre kruhový otvor s priemerom d presnejšie $\Delta\varepsilon \approx 1{,}22\,\lambda/d$. Rovnako pri zbiehavom zväzku s uhlom $\Delta\varepsilon$ je veľkosť stopy $a = 1{,}22\,\lambda/\Delta\varepsilon$, resp. približne $a = \lambda/\Delta\varepsilon$. Ak predpokladáme osvetlenie celej šošovky s polomerom r a vzdialenosť predmetu f, pre malý uhol zbiehavosti zväzku je približne $\Delta\varepsilon \approx 2r/f$.

Vlnová dĺžka λ svetla v kvapaline s indexom lomu n_0 je $\lambda = \lambda_0/n_0$. (2) 1b

Aby sa zväzok zaostril na rozmer pixlu a,

$$a \approx \frac{\lambda}{\Delta\varepsilon} \approx \frac{\lambda}{2r}\, f\,. \qquad (3) \qquad 2b$$

Vzťah medzi polomerom r povrchu a hĺbkou y kvapaliny (guľového odseku) určíme zo vzťahu

$$y = R - \sqrt{R^2 - r^2}\,.$$

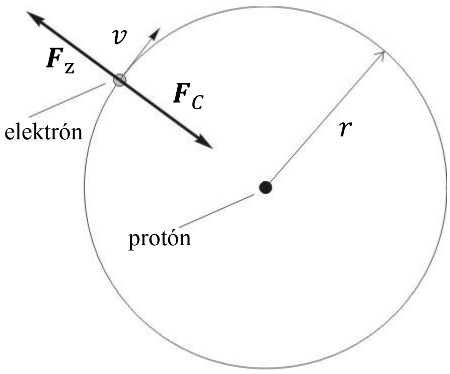
Po dosadení zo vzťahov (1), (2) a (3) dostaneme hĺbku kvapaliny v strede misky

$$y = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda f}{2a}\right)^2} = R\left(1 - \sqrt{1 - \left[\frac{\lambda_0}{2a\,(n_1 - n_0)}\right]^2}\right),$$

pre dané hodnoty $y \approx 6{,}0$ mm. 2b

4. *Bohrov model atómu*

a) V neinerciálnej sústave spojenej s elektrónom pôsobí na elektrón okrem dostredivej elektrickej sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}$ aj zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}$. obrázok 1b



Obr. RA–2

Polomer r_{n} trajektórie elektrónu určíme z rovnosti uvedených síl a postulátu kvantovania:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

a

$$m v r = n\hbar\,.$$

Z týchto rovníc máme

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{e^2 m}\,, \quad r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m}\,.$$

Pre dané hodnoty $r_1 \approx 5{,}3\times10^{-11}$ m. 2b

b) Dostredivé zrýchlenie elektrónu

$$a_n = \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2 r_n^3} = \frac{m}{n^4\hbar^4}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^3. \qquad 1b$$

Pre dané hodnoty $a_1 \approx 9{,}02\times10^{22}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Perióda obehu elektrónu

$$T_n = 2\pi\frac{m r_n^2}{n\hbar} = 2\pi\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2\frac{(n\hbar)^3}{m}\,.$$

Pre dané hodnoty $T_1 \approx 1{,}52\times10^{-16}$ s. 1b

Celková energia

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{m e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2}\,.$$

Pre dané hodnoty $E_1 = -\,2{,}18\times10^{-18}$ J $\approx -13{,}6$ eV. 1b

c) Rozmerová analýza

$$\mathrm{W} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)^{\beta}\mathrm{C}^{\gamma}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^{\delta}$$

$$\frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s^3}} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{A^2\cdot s^2\cdot s^2}}{\mathrm{m\cdot kg\cdot m^2}}\right)^{\beta}(\mathrm{A\cdot s})^{\gamma}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)^{\delta}$$

kg: $1 = -\beta$

$$\begin{aligned} \text{m:} \quad 2 &= \alpha - 3\beta + \delta \\ \text{s:} \quad -3 &= -\alpha + 4\beta + \gamma - 2\delta \qquad\qquad -1 = \beta + \gamma - \delta \\ \text{A:} \quad 0 &= 2\beta + \gamma \end{aligned}$$

Odtiaľ máme $\beta = -1$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$, $\alpha = -3$ 1b

$$P = K\, c^{\alpha}\, \varepsilon_0^{\beta}\, q^{\gamma} a^{\delta}$$

$$P = K\, \frac{q^2 a^2}{c^3 \varepsilon_0}.$$

$$P_1 = \frac{e^2 a_1^2}{c^3 \varepsilon_0} = \frac{e^2}{c^3 \varepsilon_0} \left(\frac{m}{\hbar^4}\right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0}\right)^6$$. Pre dané hodnoty $P_1 \approx 8{,}8\times10^{-7}$ W. 1b

d) Za jeden obeh by vyžiaril elektrón energiu

$$W_1 = P_1\, T_1 \approx 1{,}33\times10^{-22}\ \text{J} \approx 8{,}3\times10^{-4}\ \text{eV}.$$

Pokles energie E_1 o 1 % by nastal po $N_1 \approx 163$ obehoch, tzn. za čas $t_1 \approx 2{,}5\times10^{-14}$ s. 2b

57. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie A*

Autori úloh:	Ivo Čáp (1, 2, 3), Aba Teleki, (4)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016