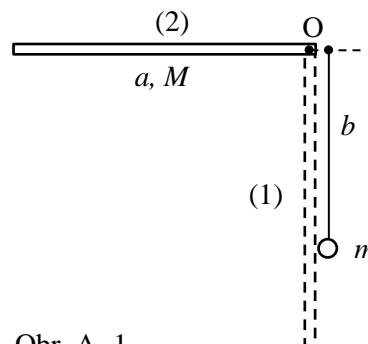


57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória A – krajské kolo
texty úloh

1. Náraz tyče

Na vodorovnej osi O, pevne votknutej do steny, je zavesená jedným koncovým bodom homogénna tyč s dĺžkou a a hmotnosťou M . Tyč sa môže voľne otáčať okolo osi O a v pokoji je v zvislej polohe (1), v ktorej sa dotýka malej guľôčky s hmotnosťou m zavesenej na tenkom vlákne s dĺžkou $b < a$. Bod závesu vlákna je rovnakej výšky ako os O. Pevnosť vlákna je daná najmenšou ťahovou silou F_p , pri ktorej sa vlákno pretrhne. Tyč vychýlime zo zvislej do vodorovnej polohy (2) a uvoľníme, obr. A-1. Po dosiahnutí zvislej polohy tyč narazí do guľôčky. Zrážka je dokonale pružná.



Obr. A-1

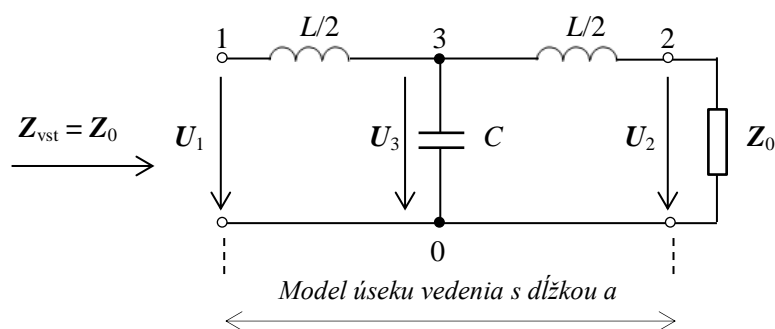
- Stručne uveďte fyzikálnu analýzu procesu zrážky tyče s guľôčkou a uveďte fyzikálne zákony, ktoré sa pritom uplatnia.
- Odvodte vzťah pre veľkosť v rýchlosti guľôčky tesne po zrážke. Určte dĺžku b_m vlákna, pri ktorej má rýchlosť v maximálnu hodnotu v_m . Vypočítajte hodnotu v_m .
- Určte dĺžku b_p vlákna, pri ktorej sila napínajúca vlákno po náraze tyče má maximálnu hodnotu. Určte hodnotu pevnosti F_p vlákna, aby sa vlákno nepretrhlo pri žiadnej hodnote dĺžky b vlákna.

Úlohu riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty: $M = 150$ g, $m = 80$ g, $a = 75$ cm, $g = 9,8$ m·s⁻².

Moment zotrvačnosti tenkej tyče s dĺžkou a a hmotnosťou M vzhľadom na os kolmú na tyč prechádzajúcu koncovým bodom tyče $I = (1/3) M a^2$. Trenie tyče v osi otáčania, odpor vzduchu pri jej pohybe ako aj rozťažnosť vlákna neuvažujte.

2. Elektrické vedenie

Krátky úsek elektrického vedenia (dva rovnobežné vodiče alebo koaxiálny kábel) možno modelovať zjednodušeným elektrickým obvodom podľa schémy na obr. A-2, kde L predstavuje indukčnosť vodičov a C vzájomnú kapacitu vodičov. Elektrické vedenie charakterizujú veličiny L^* – dĺžková indukčnosť a C^* – dĺžková kapacita (indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia). Predpokladajte, že k vstupným svorkám je pripojený zdroj harmonického napätia.



Obr. A-2

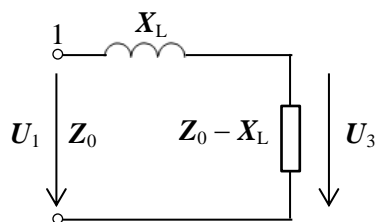
Dôležitou veličinou je *charakteristická impedancia* Z_0 vedenia, ktorá je definovaná nasledovne: Ak pripojíme k výstupným svorkám vedenia záťaž s impedanciou Z_0 , je vstupná impedancia vedenia medzi vstupnými svorkami rovnaká $Z_{\text{vst}} = Z_0$. To isté platí aj pre krátky úsek vedenia, obr. A-2.

- a) Určte charakteristickú impedanciu Z_0 vedenia podľa modelu na obr. A-2 a vypočítajte kritickú frekvenciu f_k , pri ktorej je charakteristická impedancia Z_0 nulová. Impedancia Z_0 je komplexná veličina. Určte jej absolútnu hodnotu $Z_0 = |Z_0|$ pre frekvencie vstupného napätia $f < f_k$ a $f > f_k$. Ukážte, že pre $f \ll f_k$ hodnota $Z_0 = R_0$ nezávisí od frekvencie a pre $f \gg f_k$ sa úsek správa ako induktor s indukčnosťou L_0 nezávislou od frekvencie. Určte hodnoty R_0 a L_0 .

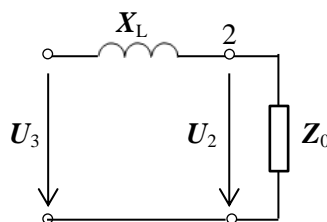
Ďalšou charakteristickou veličinou je *charakteristický napäťový prenos* $A_{U0} = U_2/U_1$, pomer výstupného a vstupného napätia pri záťaži s charakteristickou impedanciou Z_0 .

- b) Pre úsek vedenia podľa obr. A-2 určte charakteristický napäťový prenos A_{U0} a vyjadrite ho pomocou charakteristickej impedancie Z_0 a induktancie X_L induktora s indukčnosťou $L/2$.

Pomôcka: Najskôr vyjadrite pomer fázorov U_3/U_1 prvého deliča napätia (obr. A-2a), potom pomer fázorov U_2/U_3 druhého deliča napätia (obr. A-2b). Pomocou nich určte charakteristický napäťový prenos $A_{U0} = U_2/U_1$.



Obr. A-2a



Obr. A-2b

- c) Ukážte, že pre $f < f_k$ je veľkosť charakteristického napäťového prenosu $A_{U0} = |A_{U0}| = 1$ a pre $f > f_k$ platí $A_{U0} = |A_{U0}| < 1$. V oboch prípadoch určte fázový rozdiel φ_{U0} výstupného a vstupného napätia.

Pri modelovaní elektrického vedenia s dĺžkovou indukčnosťou L^* a dĺžkovou kapacitou C^* uvažujte reťazec N za sebou zapojených krátkych úsekov (podľa modelu na obr. A-2) s dĺžkou a . Predpokladajte, že k výstupu posledného úseku je pripojená záťaž s charakteristickou impedanciou Z_0 . Ak je ku vstupu reťazca pripojený zdroj harmonického napätia, môže sa pozdĺž reťazca šíriť netlmená harmonická napäťová vlna, opísaná vlnovou funkciou $U_n = U_1 \sin(\omega t - nka)$, kde U_n je napätie na výstupe n -tého úseku, $k = \omega/c$ vlnové číslo, pričom c je fázová rýchlosť šírenia vlny pozdĺž reťazca.

- d) Uveďte podmienku pre šírenie netlmenej napäťovej vlny pozdĺž reťazca. Pomocou fázového posunutia φ_{U0} na úseku s dĺžkou a určte fázovú rýchlosť c vlny pre veľmi nízke frekvencie $f \ll f_k$.

Pri výpočtoch uvažujte hodnoty $a = 10 \text{ cm}$, $L^* = L/a = 3,2 \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $C^* = C/a = 1,2 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pozn.: Pre malé hodnoty $x \ll 1$ platí približný vzťah $\text{tg}x \approx x$, resp. $\text{arctg}x \approx x$.

3. Šošovka

Na hladine vody s indexom lomu $n_0 = 1,33$ pláva veľmi tenká priehľadná škrupina s guľovým tvarom s polomerom krivosti $R = 5,0$ cm, v ktorej sa nachádza priehľadná kvapalina s indexom lomu $n_1 = 1,42$. Kvapalinové teleso v škrupine predstavuje tenkú optickú šošovku s rovinným horným povrchom. Na dne nádoby s vodou, v ktorej šošovka pláva, je optický senzor s rozmermi $17,3 \times 13,0$ mm² a rozlíšením 6,0 Mpx (megapixelov). Vo výške $H \gg R$ nad hladinou a na optickej osi šošovky sa nachádza bodový LED zdroj svetla s vlnovou dĺžkou $\lambda_0 = 520$ nm, obr. A–3.

- a) Určte hĺbku h_0 vody v nádobe, aby bola svetelná stopa zachytená senzorom čo najmenšia. Nakreslite obrázok, vyznačte v ňom okrem šošovky chod charakteristických lúčov a príslušný vzťah odvodte.

Pixel je elementárna plôška na povrchu senzora, ktorá poskytuje úplnú informáciu o intenzite a farbe svetla v danom bode. Predpokladajme, že jeden pixel zaujíma na povrchu senzora štvorec s dĺžkou strany a .

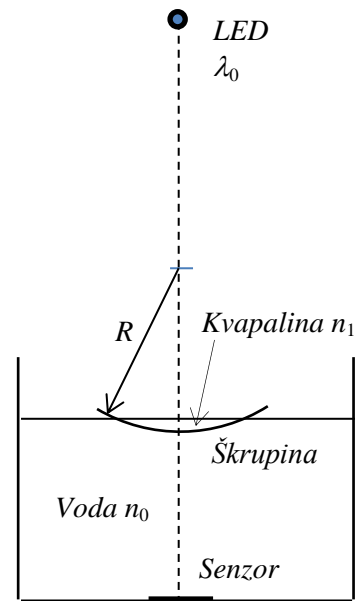
- b) Určte dĺžku a elementárnej plôšky senzora.

Pri zaoštrovaní zväzku rovnobežných lúčov sa uplatňuje difrakcia, ktorá obmedzuje možnosť sústredenia lúčov do jedného bodu.

- c) Určte približnú hĺbku y kvapaliny v strede misky (guľového odseku), aby bolo možné v dôsledku difrakcie zaostriť svetlo zdroja na jediný pixel senzora.

Šošovku považujte za tenkú a lúče svetla zdroja dopadajúce na šošovku za rovnobežné a hladiny kvapaliny v škrupine a vody v nádobe v jednej rovine.

Pre malé uhly α platia približné vzťahy $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha$.



Obr. A–3

4. Bohrov model atómu

Niels Bohr¹ publikoval svoj zásadný objav s postulátom kvantovania v dvoch častiach v apríli a júli 1913.² Postulát kvantovania hovorí, že elektrón sa pohybuje v atóme bez vyžarovania po kružnicových trajektóriách, pre ktoré veľkosť L momentu hybnosti elektrónu je rovná celočíselnému násobku redukovanej Planckovej konštanty $\hbar \approx 1,054 \times 10^{-34}$ J·s, čo vyjadríme výrazom

$$L = n \hbar, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Číslo n sa nazýva hlavné kvantové číslo stavu elektrónu. Jednotlivým hodnotám n zodpovedajú rôzne kvantové stavy elektrónu v atóme. Na kružnicovej trajektórii udržiava elektrón príťažlivá elektrická sila jadra atómu.

- Uvažujte Bohrov model atómu vodíka, v ktorom elektrón ako bodová častica obieha okolo protónu po kružnicovej trajektórii. Nakreslite obrázok a vyznačte v ňom sily, ktoré pôsobia na elektrón. Určte vzťah pre polomer r_n trajektórie, na ktorej má elektrón veľkosť momentu hybnosti $L_n = n \hbar$. Vyjadrite polomer r_1 atómu vodíka v jeho základnom stave ($n = 1$).
- Určte veľkosť a_1 zrýchlenia elektrónu na kružnicovej trajektórii, periódu T_1 obehu elektrónu po kružnici okolo jadra a celkovú energiu E_1 elektrónu v základnom stave ($n = 1$).

Podľa Maxwellovej teórie elektrodynamiky častica s elektrickým nábojom, ktorá vykonáva zrýchlený pohyb, vyžaruje elektromagnetické žiarenie. Výkon P žiarenia častice závisí od veľkosti a jej zrýchlenia a jej náboja q podľa vzťahu

$$P = K c^\alpha \varepsilon_0^\beta q^\gamma a^\delta, \quad (2)$$

kde K je bezrozmerný faktor, $c = 2,998 \times 10^8$ m·s⁻¹ rýchlosť šírenia svetla vo vákuu a $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F·m⁻¹ elektrická konštanta.

- Určte pomocou rozmerovej analýzy exponenty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vo vzťahu (2) a napíšte konkrétny tvar výkonu P podľa vzťahu (2). Určte s použitím získaného vzťahu (2) a $K \approx 1,00$ výkon P vyžarovania elektrónu v základnom stave v atóme vodíka.
- Určte počet N_1 obehov elektrónu a zodpovedajúci čas t_1 , za ktorý by v dôsledku vyžarovania s výkonom P poklesla energia E_1 elektrónu v základnom stave o 1 %.

Pri výpočtoch predpokladajte, že hmotnosť elektrónu $m = 9,109 \times 10^{-31}$ kg je veľmi malá v porovnaní s hmotnosťou protónu. Veľkosť náboja elektrónu a protónu $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C.

¹ Dánsky fyzik Niels Bohr, sa stal laureátom Nobelovej ceny za fyziku v roku 1922, za zásluhy pri skúmaní štruktúry atómov a ich vyžarovania.

² N. Bohr: On the Constitution of Atoms and Molecules (*O povahe atómov a molekúl*), Philos. Mag., vol. 26, no.1 p. 1, a Philos. Mag., vol. 26, no. 1 p. 476