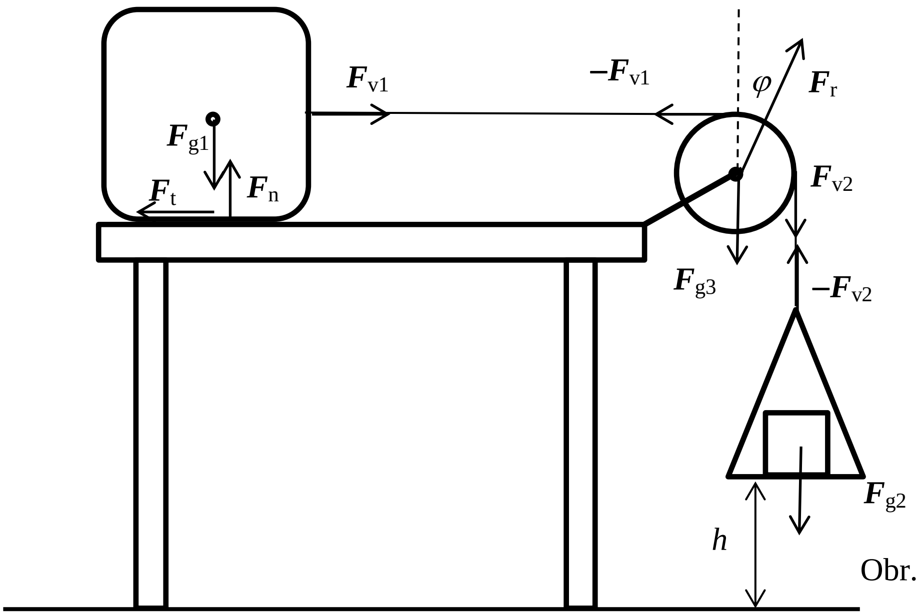
57. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2015/2016
Kategória B – krajské kolo
Riešenie úloh

1. *Mechanická sústava*

Riešenie:

a)



Obr. RB−1

Opis síl:

$\boldsymbol{F}_{g1}$, $\boldsymbol{F}_{g2}$, $\boldsymbol{F}_{g3}$ – tiažové sily pôsobiace na teleso, misku so závažím a kladku

$\boldsymbol{F}_{n}$ – tlaková sila podložky

$\boldsymbol{F}_{t}$ – sila kĺzavého trenia ($F_t = f\,F_n$)

$\boldsymbol{F}_{v1}$ – ťahová sila vlákna na teleso T

$-\boldsymbol{F}_{v1}$ – vodorovná ťahová sila vlákna na kladku K

$\boldsymbol{F}_{v2}$ – zvislá ťahová sila vlákna na kladku K

$-\boldsymbol{F}_{v2}$ – zvislá ťahová sila vlákna na misku so závažím ($F_{v1} \neq F_{v2}$)

$\boldsymbol{F}_{r}$ – reakčná sila pôsobiaca na kladku v jej osi

(celkove 10 síl) obrázok 1b a za opis každej sily 0,2 b – spolu 3b

b) Pohybová rovnica telesa

$M\,a = F_{v1} - F_t$, kde $F_t = f\,F_n$, pričom $F_n = F_g = M\,g$. (1) 1b

Pohybová rovnica misky so závažím

$m\,a = F_{g2} - F_{v2}$, kde $F_{g2} = m\,g$. (2) 1b

Pohybová rovnica rotácie kladky

$$J\,\varepsilon = F_{v2}\,r - F_{v1}\,r\text{. kde } \varepsilon = \frac{a}{r}. \qquad (3) \qquad 1b$$

Z rovníc (1) až (3) postupne vylúčime sily F_{v1} a F_{v2} a vyjadríme zrýchlenie

$$a = \frac{m\,g - f\,M\,g}{M + m + \dfrac{J}{r^2}}. \qquad (4)$$

Všetky veličiny v (4) sú konštantné, a teda i zrýchlenie je konštantné a pohyb je rovnomerne zrýchlený.

Pre pokles misky máme

$$h = \frac{1}{2}\,a\,t^2\text{, resp. } a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (5)$$

S použitím rovnice (5) máme

$$f = \frac{m}{M} - \frac{2h}{g\,t^2}\left(1 + \frac{m}{M} + \frac{J}{M\,r^2}\right).$$

Pre dané hodnoty $f \approx 0{,}392$. 2b

c) Z podmienky rovnováhy síl na kladke máme

$$F_r \sin\varphi = F_{v1} \qquad \text{a} \qquad F_r \cos\varphi = F_{v2} + F_{g3}$$

a po dosadení

$$F_r \sin\varphi = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) - \frac{J}{r^2}\frac{2h}{t^2}$$

$$F_r \cos\varphi = F_{g2} + F_{g3} - m\,a = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) + m_k\,g.$$

Odtiaľ máme

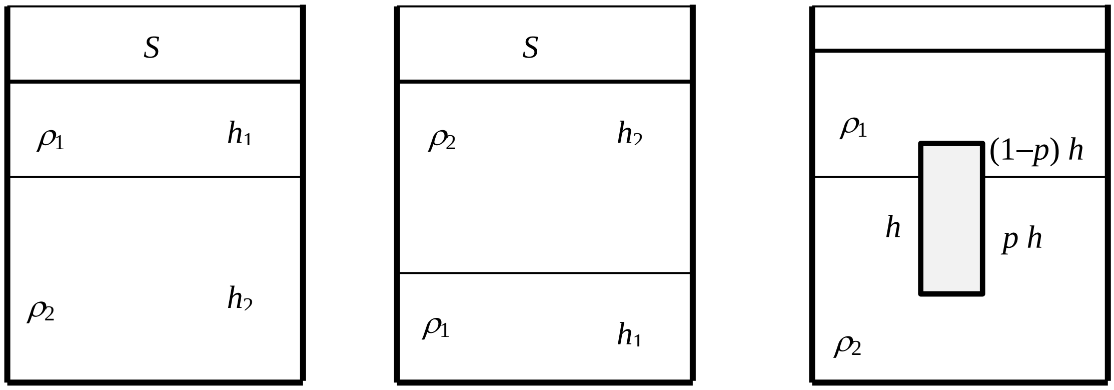
$$F_r = \sqrt{\left[m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) - \frac{J}{r^2}\frac{2h}{t^2}\right]^2 + \left[m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) + m_k\,g\right]^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1 - \dfrac{2h}{g\,t^2}\left(1 + \dfrac{J}{m\,r^2}\right)}{1 + \dfrac{m_k}{m} - \dfrac{2h}{g\,t^2}}.$$

Pre dané hodnoty $F_r \approx 4{,}05$ N, $\varphi \approx 34{,}7°$. 2b

2. *Kmity na rozhraní kvapalín*

Riešenie:



(a) (b) (c)

Obr. RB-2

a) Ilustračný obr. RB-2 (c). 1b

Vysvetlenie rozdelenia nemiešateľných kvapalinových telies:

Sú možné dva stavy, obr. RB–2 a, b. Obidva stavy sa vyznačujú celkovou potenciálnou energiou sústavy kvapalinových telies

$$E_{\mathrm{pa}} = S\, h_2\, \rho_2 \frac{h_2}{2} g + S\, h_1\, \rho_1 \left(h_2 + \frac{h_1}{2} \right) g = S\, g \left(\rho_2 \frac{h_2^2}{2} + \rho_1 \frac{h_1^2}{2} + \rho_1\, h_1\, h_2 \right)$$

$$E_{\mathrm{pb}} = S\, h_1\, \rho_1 \frac{h_1}{2} g + S\, h_2\, \rho_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right) g = S\, g \left(\rho_2 \frac{h_2^2}{2} + \rho_1 \frac{h_1^2}{2} + \rho_2\, h_1\, h_2 \right).$$

Keďže $\rho_2 > \rho_1$, $E_{\mathrm{pb}} > E_{\mathrm{pa}}$. Stabilná je sústava s menšou potenciálnou energiou, preto sústava zaujme rozloženie podľa obr. RB–2 a.

Iné vysvetlenie:

Ak najprv do nádoby nalejeme kvapalinu 2, potom pridávame kvapalinu 1, kvapky kvapaliny 1 s menšou hustotou sú z kvapaliny 2 vytláčané podľa Archimedovho zákona na hladinu kvapaliny 2 s väčšou hustotou. Ak donádoby nalejeme kvapalinu 1 a potom pridávame kvapalinu 2 s väčšou hustotou, kvapky kvapaliny 2 s väčšou hustotou budú klesať v kvapaline 1 k jej dolnému okraju a na dne vytvoria vrstvu.

Pozn.: Stav podľa obr. RB–2 b je tiež rovnovážny, ale ide o labilnú rovnováhu (Podobne ako keď postavíme ceruzku na špičku). Stačí malá porucha a z dolnej kvapaliny sa budú uvoľňovať kvapky, ktoré budú v kvapaline 2 stúpať k jej hladine, až kým sa rozloženie nezmení na stav podľa obr. RB–2 a.

Fyzikálne zdôvodnenie rozloženia kvapalín 2b

b) Keďže je valček celý ponorený a pláva, podľa Archimédovho zákona platí

$$\rho g h S = \rho_2\, g\, p h S + \rho_1\, g\, (1-p)\, h S\,.$$

Z tejto rovnice máme

$$\rho = p\, \rho_2 + (1-p)\, \rho_1\,. \qquad (1)$$

Pre dané hodnoty $\rho \approx 940\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. 3b

c) Ak sa valček vychýli z rovnovážnej polohy nadol o x, je vztlaková sila

$$F_{v1} = \rho_2\, g\,(p\,h + x\,)S + \rho_1\, g\,[(1-p)\,h - x]S \qquad (2)$$

Výsledná sila, ktorá pôsobí na valček, je daná rozdielom tiaže valca a vztlakovej sily pôsobiacej na valec (2) (tiaž valca určíme pomocou jeho hustoty ρ, vzťah (1))

$$F = -(\rho_2 - \rho_1)\, g\, S\, x = -k\, x\,, \text{ kde } k = (\rho_2 - \rho_1)\, g\, S\,.$$ 1b

Pohybová rovnica valčeka

$$m\,a = \rho\,S\,h\,a = -\,k\,x.$$ 1b

Pohyb telesa určený silou priamo úmernou výchylke a pôsobiacou proti smeru výchylky ($F = -\,k\,x$) je jednoduchý harmonický kmitavý pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{p\,\rho_2 + (1-p)\,\rho_1}}\sqrt{\frac{g}{h}}\,.$$

Pre dané hodnoty $f \approx 0{,}813\ \mathrm{s^{-1}}$. 2b

3. Zohrievanie plynu

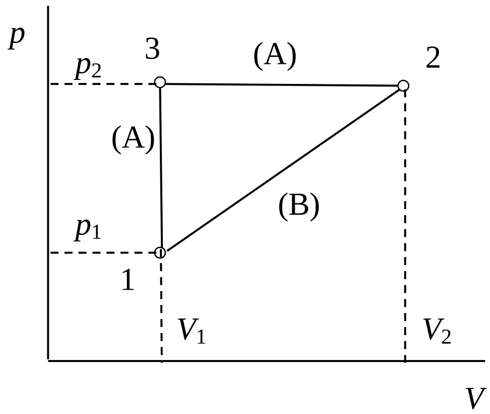
Riešenie:

a) Teplotu určíme zo stavovej rovnice ideálneho plynu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}\,, \text{ odkiaľ } T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = a\,b\,T_1\,.$$

Pre dané hodnoty $T_2 \approx 540$ K. 1b

b) Diagram p–V. 1b



Obr. RB–3

c) Z prvej vety termodynamickej máme

$$\Delta U = Q - W\,,$$

kde $\Delta U = C_V\,(T_2 - T_1)$ je zmena vnútornej energie plynu.

Počas deja (A) plyn koná prácu iba pri stavovej zmene 3–2

$$W_A = p_2\,(V_2 - V_1).$$

Teplo dodané plynu pri tejto zmene

$$Q_A = \Delta U + W = C_V\,(T_2 - T_1) + p_2\,(V_2 - V_1)\,,$$

po dosadení

$$Q_A = \left[\frac{s}{2}(a\,b - 1) + a\,(b-1)\right] p_1\,V_1\,.$$

Pre dané hodnoty $Q_A \approx 2{,}60$ kJ. 2b

d) Dej (B) má rovnaké koncové stavy, a teda zmena vnútornej energie ΔU je rovnaká ako počas deja (A).

Práca vykonaná plynom

$$W_{\mathrm{B}} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1)$$

a teplo dodané plynu

$$Q_{\mathrm{B}} = \Delta U + W_{\mathrm{B}} = C_V \ (T_2 - T_1) + \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) \, .$$

Po dosadení

$$Q_{\mathrm{B}} = \left[\frac{s}{2} (a\,b - 1) + \frac{1}{2} (a + 1) \, (b - 1) \right] p_1 \, V_1 \, .$$

Pre dané hodnoty $Q_{\mathrm{B}} \approx 2{,}55$ kJ. 2b

e) Práca vykonaná plynom pri cyklickom deji je v p–V diagrame znázornená obsahom plochy trojuholníka 1–2–3 v daných súradniciach.

$$W = \frac{1}{2} (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (a - 1)(b - 1) \, p_1 \, V_1 \, .$$

Pre dané hodnoty $W \approx 50$ J. 2b

Počas cyklu sa plynu dodáva teplo Q_{A} pri zmenách 1–3–2. Účinnosť cyklu

$\eta = \dfrac{W}{Q_{\mathrm{A}}} = \dfrac{(a - 1)(b - 1)}{s\,(a\,b - 1) + 2\,a\,(b - 1)}$. Pre dané hodnoty $\eta \approx 0{,}0192 = 1{,}92$ %. 2b

4. *Prúd cievky*

Riešenie:

a) Fázor prúdu (obr. B–2 a)

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{U}_0}{R_0 + R + \mathrm{j}\,\omega L} \, ,$$

efektívna hodnota prúdu

$I_1 = \dfrac{U_0}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + (\omega L)^2}}$. Pre dané hodnoty veličín $I_1 \approx 25{,}4$ mA. 1b

Činný príkon cievky je príkon rezistora s odporom R (činný príkon induktora je nulový)

$P_1 = R\,I_1^2 = U_0^2 \dfrac{R}{(R_0 + R)^2 + (\omega L)^2}$. Pre dané hodnoty veličín $P_1 \approx 23{,}2$ mW. 1b

Svorkové napätie

$$\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{I}_1 \, (R + \mathrm{j}\,\omega L) \, .$$

Rozdiel fáz medzi napätím $\boldsymbol{U}_{12}$ a prúdom $\boldsymbol{I}_1$

$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega L}{R}$. Pre dané hodnota $\varphi_1 \approx 87{,}8°$. 1b

b) Fázor prúdu (obr. B–2 b)

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{U}_0}{R_0 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{R_0 + R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

a efektívna hodnota prúdu

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C_1}\right)^2}}$$. Pre dané hodnoty $I_2 \approx 35{,}2$ mA. 1b

c) Efektívnu hodnotu prúdu cievky vyjadríme v tvare

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$ 1b

Maximálna hodnota prúdu zodpovedá hodnote kapacity C_2, pre ktorú je hodnota menovateľa minimálna, tzn.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C_2} = 0, \text{ resp. } C_2 = \frac{1}{\omega^2 L}, \qquad (1)$$

(rezonancia sériového R, L, C obvodu).

Pre dané hodnoty veličín $C_2 \approx 141$ nF. 1b

Efektívna hodnota prúdu je potom

$$I_\mathrm{m} = \frac{U_0}{R_0 + R}$$. Pre dané hodnoty veličín $I_\mathrm{m} \approx 279$ mA. 1b

Činný príkon cievky

$$P_\mathrm{m} = R\, I_\mathrm{m}^2 = \frac{R}{(R_0 + R)^2} U_0^2$$. Pre dané hodnoty veličín $P_\mathrm{m} \approx 2{,}80$ W. 1b

Pomer

$$p = \frac{I_\mathrm{m}}{I_1} = \frac{\sqrt{(R_0 + R)^2 + (\omega L)^2}}{R_0 + R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R_0 + R}\right)^2}.$$

Pre dané hodnoty veličín $p \approx 11{,}0$. 1b

Ako vidno z výsledku, s využitím rezonancie možno výrazne zosilniť prúd cievky (v tomto prípade 11×) a tým aj generované magnetické pole. Keďže ide o rezonanciu, možno tento spôsob použiť iba pre istú frekvenciu. Keby sa frekvencia menila, pre každú frekvenciu je potrebné použiť kapacitor s inou kapacitou C_2 pdľa vzťahu (1). 1b

57. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie B*

Autori úloh:	Kamil Bystrický (1), Ľubomír Konrád (2, 3), Ivo Čáp (4)
Recenzia a úprava:	Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Preklad textu do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016